Dolinski, Myron

Politische Arithmetik

Wien

1914

98-84519-1
MASTER NEGATIVE #

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DIVISION

BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET

ORIGINAL MATERIAL AS FILMED -- EXISTING BIBLIOGRAPHIC RECORD

330.1
D689

Dolinski, Myron
Politische arithmetik (zinseszinsenrechnung und versicherungsmathematik mit zwei im anhange befindlichen logarithmentafeln) von Myron Dolinski ... Wien, Fromme, 1914.
iv, 292 p. tables. 24cm.

——— ———Logarithmentafeln und tabellen. Wien, Fromme, 1914.
cover-title, 57 p. 24 cm.

94944

TECHNICAL MICROFORM DATA

FILM SIZE: 35 mm REDUCTION RATIO: 14:1 IMAGE PLACEMENT: IA (IIA) IB IIB

DATE FILMED: 12/21/98 INITIALS: LL

TRACKING #: 33386

FILMED BY PRESERVATION RESOURCES, BETHLEHEM, PA.

BIBLIOGRAPHIC IRREGULARITIES

MAIN ENTRY: Dolinski, Myron

Politische Arithmetik

Bibliographic Irregularities in the Original Document:

List all volumes and pages affected; include name of institution if filming borrowed text.

____ Page(s) missing/not available: ____

____ Volume(s) missing/not available: ____

X Illegible and/or damaged page(s) text missing p. 209

____ Page(s) or volume(s) misnumbered: ____

____ Bound out of sequence: ____

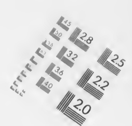
____ Page(s) or volume(s) filmed from copy borrowed from: ____

____ Other: ____

____ Inserted material: ____

TRACKING #: MSH33386

2.5 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
1234567890



2.0 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

1.5 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

PM-MGP
METRIC GENERAL PURPOSE TARGET
PHOTOGRAPHIC

200 mm

150 mm

100 mm

1.0 mm
1.5 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

2.0 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
1234567890

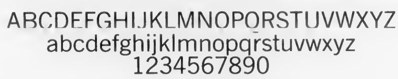
2.5 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
1234567890

A5

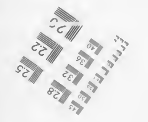
A4

A3

PRECISION℠ RESOLUTION TARGETS



A & P International
612/854-0088 FAX 612/854-0482
8030 Old Cedar Ave. So., Ste. #215
Bloomington, MN 55425



4.5 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz
1234567890

3.5 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890

3.0 mm
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
abcdefghijklmnopqrstuvwxyz1234567890



Politische Arithmetik

(Zinseszinsenrechnung und Versicherungsmathematik
mit zwei im Anhange befindlichen Logarithmentafeln)

Von

MYRON DOLINSKI

Professor an der Wiener Handelsakademie,
behördl. autorisierter Versicherungstechniker

Preis geheftet Kronen 5.80



Wien und Leipzig 1914
Buchdruckerei und Verlagsbuchhandlung Carl Fromme,
Ges. m. b. H.

Politische Arithmetik

(Zinseszinsenrechnung und Versicherungsmathematik mit zwei im Anhange befindlichen Logarithmentafeln)

Von

MYRON DOLINSKI

Professor an der Wiener Handelsakademie, behördl. autorisierter Versicherungstechniker

Preis geheftet Kronen 5.80

100



Wien und Leipzig 1914
Buchdruckerei und Verlagsbuchhandlung Carl Fromme,
Ges. m. b. H.

Politische Arithmetik

(Zinseszinsenrechnung und Versicherungsmathematik mit zwei im Anhange befindlichen Logarithmentafeln)

Von

MYRON DOLINSKI

Professor an der Wiener Handelsakademie, behördl. autorisierter Versicherungstechniker

Preis geheftet Kronen 5.80





Wien und Leipzig 1914
Buchdruckerei und Verlagsbuchhandlung Carl Fromme, Ges. m. b. H.

Verlags-Archiv Nr. 1355

Buchdruckerei Carl Fromme, Ges. m. b. H., Wien.

Inhaltsverzeichnis.

I. ABSCHNITT.

Wesen und Arten der Zinseszinsenrechnung.

Wenn man die am Ende einer bestimmten Zeiteinheit, z. B. eines Jahres, eines Halbjahres oder Semesters, eines Vierteljahres oder Quartals usf. fälligen Zinsen eines Kapitals nicht behebt, sondern zum Kapital zuschlägt und das so vermehrte Kapital weiterhin verzinst, so sagt man: *„das Kapital ist auf Zinseszinsen angelegt"*. In diesem Falle bildet das Kapital samt den Zinsen des ersten Zeitraumes das zu verzinsende Kapital des zweiten Zeitraumes, ferner dieses Kapital samt seinen Zinsen das zu verzinsende Kapital des dritten Zeitraumes usf. Als ein Zeitraum wird, falls nicht ein anderer Verzinsungstermin besonders bemerkt wird, immer ein Jahr genommen.

Diese Art der Verzinsung eines Kapitals, bei welcher also die Zinsen immer am Schlusse einer jeden Zeiteinheit zum Kapital hinzugefügt werden, wird eine *dekursive Verzinsung* genannt; werden jedoch die Zinsen am Anfange einer jeden Zeiteinheit vom Endkapital der betreffenden Zeiteinheit berechnet, so heißt diese Art der Verzinsung eine *antizipative Verzinsung*.

1. Dekursive Verzinsung.

§ 1. *Endwert eines auf Zinseszinsen angelegten Kapitals.*

Wird ein Kapital zu p Prozent verzinst, so betragen die Zinsen *einer Kapitalseinheit* nach einem Jahre $\frac{p}{100}$, die man mit i bezeichnet und den *Zinsfuß* nennt. Die Kapitalseinheit wächst mithin nach Ablauf eines Jahres auf $1+i$ und das Kapital k auf $k+ki=k(1+i)$ an. Der Faktor $1+i$ wird (dekursiver) *Aufzinsungsfaktor* genannt und mit r bezeichnet.

Eine Kapitalseinheit hat also am Schlusse des ersten Jahres den Wert

$$1 + i = r,$$

am Schlusse des zweiten Jahres den Wert

$$r(1 + i) = r \cdot r = r^2,$$

am Schlusse des dritten Jahres den Wert

$$r^2(1 + i) = r^2 r = r^3, \text{ usf.}$$

und am Schlusse des $n$ten Jahres den Wert

$$r^{n-1}(1 + i) = r^{n-1} \cdot r = r^n$$

Das Kapital k, welches aus k Kapitalseinheiten besteht, hat nach Ablauf von n Jahren den Wert

$$K_n = k r^n.$$

Man findet das Endkapital K_n, indem man das Anfangskapital k mit der sovielten Potenz des Aufzinsungsfaktors r multipliziert, als Verzinsungstermine vorhanden sind.

Beispiel.

Jemand macht in einer Bank eine Einlage von K 3.420·—. Welchen Wert wird diese Einlage nach 15 Jahren haben, wenn $3^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

Hier wäre also: $k = K\ 3.420·—$, $r = 1 + \frac{3·5}{100} = 1 + 0·035 = 1·035$ und $n = 15$ Jahre.

Die numerische Berechnung dieses Beispieles, sowie aller bei der Zinseszinsrechnung vorkommenden Beispiele kann auf zwei Arten durchgeführt werden, und zwar mit Hilfe der *Tabellen* und mit Hilfe der *Logarithmen*.

a) Mit Hilfe der Tabellen.

Nach der Tabelle I ist der entsprechende Aufzinsungsfaktor

$$1·035^{15} = 1·67534883.$$

daher ist $K_{15} = 3420 \times 1·035^{15} = 3420 \times 1·67534883$

oder $K_{15} = K\ 5.729·69$

b) Mit Hilfe der Logarithmen.

Wendet man an der Gleichung $K_n = k \cdot r^n$ die logarithmischen Sätze an, so erhält man

$$\log K_n = \log k + n \log r$$

und

$$\log 3420 = 3·5340261$$
$$\log 1·035 = 0·01494035$$
$$15 \log 1·035 = 0·2241053$$
$$\log K_n = 3·7581314; \quad K_n = K\ 5.729·69$$

§ 2. *Barwert eines nach einer bestimmten Zeit fälligen Kapitals.* Ist das nach einer bestimmten Zeit fällige Kapital K_n, der Prozentsatz p, mithin auch der Aufzinsungsfaktor r und die Anzahl der Verzinsungstermine n gegeben, so findet man aus der Gleichung $K_n = k r^n$ den gegenwärtigen Wert, d. i. den Barwert dieses Kapitals

$$k = \frac{K_n}{r^n}$$

oder, indem man $\frac{1}{r} = v$, mithin $\frac{1}{r^n} = v^n$ setzt,

$$k = K_n v^n.$$

Der reziproke Wert des Aufzinsungsfaktors r, d. i. $\frac{1}{r} = v$, wird *Abzinsungsfaktor* genannt.

Man findet den Barwert oder den gegenwärtigen Wert k eines nach einer bestimmten Zeit fälligen Kapitals K_n, indem man es mit der sovielten Potenz des Abzinsungsfaktors v multipliziert, als Verzinsungstermine n vorhanden sind.

Beispiel.

Wie groß ist der Barwert einer nach 20 Jahren fälligen Schuld von K 15.368·—, wenn man 4 Prozent Zinseszinsen rechnet?

a) Mit Hilfe der Tabellen.

Tabelle II gibt die Werte der entsprechenden Abzinsungsfaktoren, so ist z. B. $v^{20} = 0·45638695.$

Durch Multiplikation der Schuld von K 15.368·— mit v^{20} erhält man

$$k = 15368 \times 0·45638695 = 7013·75.$$

Der Barwert der Schuld beträgt mithin K 7.013·75.

Man bekommt natürlich auch dasselbe Resultat, wenn man die Schuld K_n durch den Aufzinsungsfaktor r^n, den man aus der Tabelle I entnimmt, dividiert. Es ist nämlich

$$k = 15368 : 2·19112314 = 7013·75.$$

b) Mit Hilfe der Logarithmen.

Durch das Logarithmieren der beiden Teile der Gleichung $k = \frac{K_n}{r^n}$ findet man

$$\log k = \log K_n - n \log r.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \log 15368 &= 4{\cdot}1866174 \\ \log 1{\cdot}04 &= 0{\cdot}01703334 \\ 20 \log 1{\cdot}04 &= 0{\cdot}3406668 \\ \log k &= 3{\cdot}8459506; \quad k = 7013{\cdot}75. \end{aligned}$$

§ 3. *Ermittlung des Prozentsatzes und der Anzahl der Verzinsungstermine.*

1. Die Gleichung $K_n = k\,r^n$ gestattet die Berechnung jeder der vier Größen K_n, k, r und n, wenn drei derselben gegeben sind; so auch der Größe r und daraus dann des Prozentsatzes p, wenn K_n, k und n gegebene Größen sind.

Aus der Gleichung $K_n = k \,.\, r^n$ folgt unmittelbar

$$r^n = \frac{K_n}{k},$$

dann

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{k}}$$

oder

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{k}}$$

und hieraus der Prozentsatz

$$p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{k}} - 1\right).$$

Beispiel.

Zu welchem Prozentsatze war ein Kapital von K 28.532·— angelegt, wenn es in 12 Jahren durch Zinseszinsen auf K 47.015·92 angewachsen ist?

a) Um dieses Beispiel mit Hilfe der Tabellen berechnen zu können, bestimmt man zunächst aus den Angaben den Wert des entsprechenden Aufzinsungsfaktors, d. i.

$$r^n = \frac{K_n}{k}.$$

In unserem Beispiele hat der Aufzinsungsfaktor r^{12} den Wert

$$47015{\cdot}92 : 28532 = 1{\cdot}64783121.$$

Dann sucht man in der Tabelle I unter $n = 12$ den auf diese Weise berechneten Aufzinsungsfaktor und nimmt jenen Prozentsatz, unter welchem der Aufzinsungsfaktor steht. Ist jedoch der Aufzinsungsfaktor in der Tabelle nicht vorhanden, wie in dem Beispiele, so nimmt man die beiden benachbarten Aufzinsungsfaktoren, zwischen denen er liegt und bildet einerseits die Differenz zwischen diesen Aufzinsungsfaktoren und anderseits die Differenz zwischen dem berechneten und

dem kleineren Aufzinsungsfaktor. Unter der Annahme, daß in dem eng begrenzten Intervalle des Prozentsatzes sich der Aufzinsungsfaktor linear verändert, kann man den dem berechneten Aufzinsungsfaktor entsprechenden Prozentsatz annähernd, wie folgt, bestimmen.

p	r^{12}	p	r^{12}
$4^1/_2$	1·69588143	$4 + x$	1·64783121
4	1·60103222	4	1·60103222
Differenz $= D$	0·09484921	d	0·04679899

Man geht nun von jenem Prozentsatze aus, der dem kleineren Aufzinsungsfaktor entspricht — in unserem Falle von 4 — und schließt auf die Zunahme x des Prozentsatzes 4 nach der Proportion

$$x : \frac{1}{2} = d : D$$

oder

$$x : \frac{1}{2} = 0{\cdot}04679899 : 0{\cdot}09484921.$$

Daraus erhält man

$$x = 0{\cdot}04679899 : 0{\cdot}18969842 = 0{\cdot}25.$$

Der Prozentsatz, zu welchem das Kapital auf Zinseszinsen angelegt war, beträgt mithin

$$p = 4 + x = 4 + 0{\cdot}25 = 4^1/_4.$$

b) Die Berechnung des Beispieles mit Hilfe der Logarithmen reduziert sich auf die Bestimmung des Wertes von

$$r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{k}}$$

also von

$$r = \sqrt[12]{\frac{47015{\cdot}92}{28532}}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \log 47015{\cdot}92 &= 4{\cdot}6722450 \\ \log 28532 &= 4{\cdot}4553322 \\ \log r^{12} &= 0{\cdot}2169128 \\ \log r &= 0{\cdot}0180761 \quad \text{und} \quad r = 1{\cdot}0425. \end{aligned}$$

Mithin ist $\quad p = (1{\cdot}0425 - 1)\,100$

oder $\quad p = 4{\cdot}25 = 4^1/_4.$

2. Bei der Ermittlung der Anzahl der Verzinsungstermine geht man von der Gleichung $K_n = k\,r^n$ aus und bestimmt daraus

$$r^n = \frac{K_n}{k}.$$

Will man die Berechnung mit Hilfe der Tabelle durchführen, dann verfährt man ähnlich wie bei der Bestimmung des Prozentsatzes. Wenn man aber die Anzahl der Verzinsungstermine mit Hilfe der Logarithmen berechnet, so erhält man zunächst aus der Gleichung $k r^n = K_n$

$$\log k + n \log r = \log K_n$$

und daraus
$$n = \frac{\log K_n - \log k}{\log r}.$$

Beispiel.

In welcher Zeit wächst ein Kapital von K 25.000·— bei 3prozentiger Verzinsung auf K 42.560·83 an?

a) Mit Hilfe der Tabelle I.

Aus der Gleichung $r^n = \frac{K_n}{k}$ ergibt sich der entsprechende Wert des Aufzinsungsfaktors

$$r^n = 1·70243320,$$

welchen man in der Tabelle unter $p = 3$ zwischen $n = 18$ und $n = 19$ findet.

Man erhält also für $p = 3$ Prozent

n	r^n	n	r^n
19	1·75350605	$18 + x$	1·70243320
18	1·70243306	18	1·70243306
D	0·05107299	d	0·00000014

den Wert für x aus der Proportion

$$D : 1 = d : x,$$

$x = 0·000002$ und für n selbst den Wert von 18 Jahren.

b) Die Berechnung der Anzahl der Verzinsungstermine mit Hilfe der Logarithmen ergibt

$$\log 42560·83 = 4·6290101$$
$$\log 25000·— = 4·3979400$$
$$0·2310701$$

$$\log 1·03 = 0·0128372$$

und $0·2310701 : 0·0128372 = 18·00004$.

Es ist demnach $n = 18$ Jahre.

Bei der Berechnung des Prozentsatzes und der Anzahl der Verzinsungstermine ist es nicht unbedingt notwendig die Werte für K_n und für k einzeln, sondern nur deren Verhältnis zu kennen.

So z. B.: in welcher Zeit würde sich ein Kapital bei einer $3^1/_2$-prozentigen Verzinsung verdoppeln?

Hier ist das Verhältnis von K_n zu k gegeben, es ist nämlich gleich 2 und gleich dem entsprechenden Aufzinsungsfaktor r^n.

Den Wert für n selbst erhält man, wie folgt:

a) Mit Hilfe der Tabelle I findet man unter $p = 3^1/_2$ Prozent:

n	r^n		r^n
21	2·05943147	$20 + x$	2·00000000
20	1·98978886	20	1·98978886
D	0·06964261	d	0·01021114

Der Wert für x ergibt sich aus der Proportion

$$D : 1 = d : x.$$

Es ist also $x = 0·01021114 : 0·06964261 = 0·15$

mithin $n = 20·15$ Jahre.

b) Mit Hilfe der Logarithmen

findet man für $n = \log 2 : \log 1·035$

oder, da $0·30103 : 0·0149403 = 20·15$ ist,

$n = 20·15$ Jahre, d. i. 20 Jahre 1 Monat und 24 Tage.

§ 4. *Konformer und nomineller Zinsfuß.*

1. Werden die Zinsen statt nach je einem Jahre nach einem anderen Zeitraume, z. B. nach jedem *m*ten Teile des Jahres zum Kapital zugeschlagen, so gilt auch in diesem Falle die Gleichung

$$K_n = k r^n = k (1 + i)^n,$$

nur ist für n die Anzahl der Verzinsungstermine und für i der Zinsfuß für eine solche Zeiteinheit zu setzen.

Ist das Kapital k auf Zinseszinsen zum Zinsfuße y für einen *m*ten Teil des Jahres angelegt, d. h. betragen die Zinsen einer Kapitalseinheit für jeden *m*ten Teil des Jahres y, so hat das Kapital k am Ende eines Jahres, da das Jahr aus m Verzinsungsterminen besteht, den Wert

$$k (1 + y)^m \text{ und nach } n \text{ Jahren } k (1 + y)^{mn}.$$

Würde das Kapital k ganzjährig zum Zinsfuße i verzinst werden, so hätte es am Ende eines Jahres den Wert

$$k (1 + i).$$

Durch Gleichstellung der beiden für ein Jahr berechneten Werte des Kapitals k erhält man

$$(1+y)^m = 1+i$$

und daraus

$$y = \sqrt[m]{1+i} - 1.$$

Der Zinsfuß y, zn welchem ein Kapital $m$teljährig verzinst werden muß, um nach 1, 2, 3, ... n Jahren denselben Endwert zu geben, wie wenn es zum Zinsfnße i ganzjährig verzinst worden wäre, wird *konformer Zinsfuß* genannt. In der nachstehenden Tabelle sind einige Werte des konformen Zinsfußes y für $m=2$, 4 und 12 znsammengestellt.

Jahreszinsfuß i	Konformer Zinsfuß y		
	$m=2$	$m=4$	$m=12$
0·03	0·014889	0·007417	0·002466
0·035	0·017350	0·008637	0·002871
0·04	0·019804	0·009853	0·003274
0·045	0 022252	0·011065	0·003675
0·05	0·024695	0·012272	0·004074

Es ist mithin gleich, ob ein Kapital ganzjährig, z. B. zu $3^1/_2$ Prozent oder vierteljährig zn 0·8637 Prozent verzinst wird; man erhält in beiden Fällen denselben Endwert.

2. Wird ein Kapital k zum Zinsfuße z pro Jahr derart auf Zinseszinsen angelegt, daß für jeden $m$ten Teil des Jahres der Zinsfuß proportional der Zeit, also $\frac{z}{m}$ beträgt, so hat es nach Ablauf eines Jahres den Wert

$$k\left(1+\frac{z}{m}\right)^m \text{ und für } n \text{ Jahre } k\left(1+\frac{z}{m}\right)^{mn}.$$

Der Zinsfuß z wird der *nominelle Zinsfuß* genannt. Um den *wirklichen Zinsfuß* i pro Jahr zn berechnen, zu welchem das Kapital k auf Zinseszinsen angelegt werden müßte, um nach Ablauf von n Jahren denselben Endwert zu geben, wie bei $m$teljähriger Verzinsnng zu dem nominellen Zinsfuße z, setzt man

$$k(1+i)^n = k\left(1+\frac{z}{m}\right)^{mn}$$

und erhält daraus

$$i = \left(1+\frac{z}{m}\right)^m + 1$$

Will man hingegen den *nominellen Zinsfuß* z berechnen, wenn der wirkliche Zinsfuß i gegeben ist, so erhält man aus der Gleichung

$$k\left(1+\frac{z}{m}\right)^{mn} = k(1+i)^n$$

zunächst

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1+i$$

nnd daraus

$$z = m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right).$$

In den folgenden 2 Tabellen sind die Werte für den wirklichen Zinsfuß für $m=2$, 4 und 12, wenn der nominelle Zinsfuß gegeben ist und umgekehrt, zusammengestellt.

Tabelle 1.

Nomineller Zinsfuß z	Wirklicher Zinsfuß i		
	$m=2$	$m=4$	$m=12$
0·03	0·030225	0·030339	0·030416
0·035	0·035306	0·035462	0·035567
0·04	0·040400	0·040604	0·040742
0·045	0·045506	0·045765	0·045940
0·05	0·050625	0·050945	0·051162

Tabelle 2.

Wirklicher Zinsfuß i	Nomineller Zinsfuß z		
	$m=2$	$m=4$	$m=12$
0·03	0·029778	0·029668	0·029595
0·035	0·034699	0·034550	0·034451
0·04	0·039608	0·039414	0·039285
0·045	0·044505	0·044260	0·044098
0·05	0·049390	0·049089	0·048889

Ist z. B. der *nominelle Prozentsatz* gleich 3 und findet die Verzinsung monatlich statt, so beträgt der wirkliche Prozentsatz 3·0416. Ist jedoch der *wirkliche Prozentsatz* gleich 3, so beträgt der nominelle Prozentsatz bei monatlicher Verzinsung 2·9595.

§ 5. *Nicht ganze Anzahl der Verzinsungstermine.*

Bei der Ermittlung der Gleichung

$$K_n = k(1+i)^n$$

haben wir vorausgesetzt, daß n eine ganze Zahl sei. Ist jedoch n eine gemischte Zahl, z. B. gleich $\left(m+\frac{0}{s}\right)$, so werden in der Praxis für die m ganze Anzahl von Jahren die Zinseszinsen und für den Bruchteil $\frac{0}{s}$ des darauffolgenden Jahres die einfachen Zinsen von $k(1+i)^m$ berechnet.

Man erhält mithin

$$K_{m+\frac{0}{s}} = k\,(1+i)^m + k\,(1+i)^m \cdot \frac{i\,0}{s}$$

oder

$$K_{m+\frac{0}{s}} = k\,(1+i)^m \left(1 + \frac{i\,0}{s}\right).$$

Beispiel.

Zu welchem Betrag wachsen K 25.000·— zu $3^1/_2$ Prozent Zinseszinsen in 10 Jahren und 3 Monaten an?

Wendet man auf dieses Beispiel die Gleichung

$$K_{m+\frac{0}{s}} = k\,(1+i)^m \left(1 + \frac{i\,0}{s}\right)$$

an, so erhält man

$$K_{10+\frac{1}{4}} = 25000 \times 1{\cdot}41059876 \times 1{\cdot}00875 = 35.573{\cdot}54$$

Der gesuchte Betrag ist daher K 35.573·54.

Theoretisch richtiger ist es aber, die Gleichung

$$K_n = k\,(1+i)^n$$

auch für $n = m + \frac{0}{s}$ anzuwenden. Denn nimmt man für den Bruchteil $\frac{0}{s}$ des auf m folgenden Jahres, d. i. des $(m+1)$ten Jahres den konformen Zinsfuß y, so erhält man

$$K_{m+\frac{0}{s}} = k\,(1+i)^m\,(1+y)^0$$

oder, wenn man darin für y den Wert $\sqrt[s]{1+i} - 1$ einsetzt,

$$K_{m+\frac{0}{s}} = k\,(1+i)^m\,(\sqrt[s]{1+i})^0$$

oder auch

$$K_{m+\frac{0}{s}} = k\,(1+i)\,(1+i)^{\frac{0}{s}}$$

und schließlich

$$K_{m+\frac{0}{s}} = k\,(1+i)^{m+\frac{0}{s}}.$$

Wendet man diese Gleichung auf das vorhin gegebene Beispiel an, so erhält man

$$K_{10+\frac{1}{4}} = 25000 \times 1{\cdot}035^{10+\frac{1}{4}}.$$

oder, wenn man beide Teile dieser Gleichung logarithmiert,

$$\log K_{10+\frac{1}{4}} = \log 25000 + \frac{41}{4} \log 1{\cdot}035$$

$$\log 25000 = 4{\cdot}3979400$$

$$\frac{41}{4} \log 1{\cdot}035 = 0{\cdot}1531386$$

$$4{\cdot}5510786, \quad K_{10+\frac{1}{4}} = 35.569{\cdot}57.$$

Der Wert des gesuchten Betrages ist gleich K 35.569·57. Er ist, wie man sieht, um K 3·97 kleiner als jener nach der in der Praxis gebräuchlichen Methode berechnete Betrag.

Würde man jedoch $(1+i)^{10+\frac{1}{4}}$ mit Hilfe der Tabelle I durch lineare Interpolation berechnen, so erhält man, wie folgt, bei $p = 3^1/_2$ Prozent den Wert für $K_{10+\frac{1}{4}}$.

n	r^n	n	r^n
11	1·45996972	10	1·41059876
10	1·41059876	x	0·01234274
D	0·04937096	$10+\frac{1}{4}$	1.42294150

Den Wert von x, der zu $1{\cdot}035^{10}$ addiert annähernd den Aufzinsungsfaktor für $\left(10+\frac{1}{4}\right)$ Jahre gibt, findet man aus der Proportion

$$D : 1 = x : \frac{1}{4}.$$

Es ist $x = 0{\cdot}01234274$, $(1+i)^{10+\frac{1}{4}} = 1{\cdot}035^{10+\frac{1}{4}} = 1{\cdot}42294150$ und

$$K_{10+\frac{1}{4}} = 25000 \times 1{\cdot}42294150 = 35.573{\cdot}54.$$

Man erhält als Endwert den Betrag von K 35.573·54, der mit dem nach der ersten Methode gewonnenen genau übereinstimmt.

§ 6. *Endwert eines auf Zinseszinsen angelegten Kapitals mit Berücksichtigung der Verwaltungskosten.*

Manche Sparkassen und Geldinstitute, welche sich mit der Verwaltung von den auf Zinseszinsen angelegten Kapitalien befassen, nehmen dafür besondere *Gebühren*, die am Ende einer jeden Verzinsungsperiode vom vorhandenen Kapital berechnet und davon abgezogen werden.

Es entsteht nun die Frage, welchen Endwert hat ein zum Zinsfuße i auf Zinseszinsen angelegtes Kapital k nach Ablauf von n Jahren,

wenn man von dem jeweiligen am Ende eines jeden Jahres vorhandenen Kapital q Prozent desselben für Verwaltungsgebühren rechnet?

Am Schlusse des ersten Jahres hat das Kapital k, wenn man die Gebühr abzieht, den Wert

$$K_1 = k\,r - k\,r\,\frac{q}{100}$$

oder

$$K_1 = k\,r\left(1 - \frac{q}{100}\right).$$

Ebenso am Schlusse des zweiten Jahres den Wert

$$K_2 = K_1\,r - K_1\,r\,\frac{q}{100}$$

oder

$$K_2 = K_1\,r\left(1 - \frac{q}{100}\right)$$

oder auch nach Substitution des Wertes von $K_1 = k\,r\left(1 - \frac{q}{100}\right)$

$$K_2 = k\,r^2\left(1 - \frac{q}{100}\right)^2$$

und allgemein nach n Jahren

$$K_n = k\,r^n\left(1 - \frac{q}{100}\right)^n$$

oder

$$K_n = k\left[r\left(1 - \frac{q}{100}\right)\right]^n.$$

Der Faktor $1 - \frac{q}{100}$ wird *Verwaltungsfaktor* genannt. *Der Endwert* eines mit Berücksichtigung der Verwaltungsgebühren auf Zinseszinsen angelegten Kapitals *wird gefunden, indem man das Anfangskapital mit der sovielten Potenz des Produktes aus dem Aufzinsungs- und Verwaltungsfaktor multipliziert als Verzinsungstermine vorhanden sind.*

Beispiel.

Auf welche Summe wächst ein Kapital von K 16.000·— in 15 Jahren bei 4½prozentiger Verzinsung an, wenn man $\frac{3}{8}$ Prozent an Verwaltungsgebühren abzieht?

Hier wäre $k = 16.000$, $r = 1{\cdot}045$, $q = \frac{3}{8} = 0{\cdot}375$ und $n = 15$.

Mithin ist

$$K_{15} = 16000\,(1{\cdot}045 \times 0{\cdot}99625)^{15}.$$

Logarithmiert man die rechte Seite dieser Gleichung, so erhält man:

$$\begin{aligned} \log 1{\cdot}045 &= 0{\cdot}0191163 \\ \log 0{\cdot}99625 &= 0{\cdot}9983683 - 1 \\ \hline &\ 0{\cdot}0174846 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 \times \log(1{\cdot}045 \times 0{\cdot}99625) &= 0{\cdot}2622690 \\ \log 16000{\cdot}— &= 4{\cdot}2041200 \\ \hline &\ 4{\cdot}4663890; \quad K_{15} = 29.267{\cdot}73. \end{aligned}$$

Die verlangte Summe beträgt K 29.267·73.

§ 7. *Diskontorechnung.*

Ist ein Kapital nach einer bestimmten Zeit fällig, so ist der gegenwärtige Wert desselben oder sein Barwert kleiner als der fällige Betrag und gleich einer Summe, die während der gegebenen Zeit verzinst das fällige Kapital gibt.

Der Unterschied zwischen dem nach einer gewissen Zeit fälligen Kapital und seinem Barwerte wird der *Diskonto* genannt.

Um den Barwert eines nach $\frac{0}{s}$ Teilen eines Jahres fälligen Kapitals $K_{\frac{0}{s}}$ nach der einfachen Zinsenrechnung zu bestimmen, dividiert man das gegebene Kapital $K_{\frac{0}{s}}$ durch $\left(1 + \frac{0}{s}\,i\right)$, so daß der Barwert

$$k = \frac{K_{\frac{0}{s}}}{1 + \frac{0}{s}\,i} \text{ ist.}$$

Der Diskonto D ergibt sich aus der Gleichung $D = K_{\frac{0}{s}} - k$ oder

$$D = \frac{\frac{0}{s}\,i\,K_{\frac{0}{s}}}{1 + \frac{0}{s}\,i}.$$

Der Barwert k gibt tatsächlich bei einfacher Verzinsung in $\frac{0}{s}$ Teilen eines Jahres den Endwert $K_{\frac{0}{s}}$. Man nennt diese Rechnungsart die *Diskontierung auf 100.*

In der Geschäftswelt, hauptsächlich im Warenverkehr, im Rimessen- und Devisengeschäfte, wo es sich gewöhnlich nur um Bruchteile eines Jahres handelt, wird der Diskonto nach kaufmännischer Art folgendermaßen berechnet.

Der Diskonto vor einem nach $\frac{0}{s}$ Teilen eines Jahres fälligen Kapitals $K_{\frac{0}{s}}$ beträgt

$$D' = K_{\frac{0}{s}} \cdot \frac{0}{s} i$$

und der diskontierte Wert des Kapitals $K_{\frac{0}{s}}$

$$k' = K_{\frac{0}{s}} - K_{\frac{0}{s}} \cdot \frac{0}{s} i$$

oder

$$k' = K_{\frac{0}{s}} \left(1 - \frac{0}{s} i\right).$$

Diese Rechnungsart wird die *Diskontierung von 100* genannt. Der Betrag k' gibt bei p-prozentiger Verzinsung nach $\frac{0}{s}$ Teilen eines Jahres den Wert

$$k'\left(1 + \frac{0}{s} i\right)$$

oder nach Substitution von $k' = K_{\frac{0}{s}}\left(1 - \frac{0}{s} i\right)$

$$K_{\frac{0}{s}}\left(1 - \frac{0}{s} i\right)\left(1 + \frac{0}{s} i\right) = K_{\frac{0}{s}}\left(1 - \frac{0^2}{s^2} i^2\right),$$

sollte aber, wenn die Berechnung des Diskontos eine richtige wäre, den Wert $K_{\frac{0}{s}}$ geben. Der Unterschied ist, so lange $\frac{0}{s}$ ein kleiner Bruch ist, gering; wird aber bedeutend größer, je mehr $\frac{0}{s}$ zunimmt und besonders, wenn $\frac{0}{s} > \frac{1}{i}$ ist. Der diskontierte Wert k' wird aber bei $\frac{0}{s} = \frac{1}{i}$ Null und bei $\frac{0}{s} > \frac{1}{i}$ sogar negativ.

Aus den beiden Gleichungen

$$D = \frac{\frac{0}{s} i K_{\frac{0}{s}}}{1 + \frac{0}{s} i} \quad \text{und} \quad D' = \frac{0}{s} i K_{\frac{0}{s}}$$

ergibt sich ohne weiteres

$$\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} = \frac{s + 0 i}{0 i K_{\frac{0}{s}}} - \frac{s}{0 i K_{\frac{0}{s}}}$$

oder

$$\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} = \frac{1}{K_{\frac{0}{s}}}.$$

Daraus folgt, daß *der Unterschied der reziproken Werte der Diskontos bei der Diskontierung auf 100 und von 100 gleich dem reziproken Werte des diskontierten Kapitals* und *unabhängig von der Zeit und dem Prozentsatze ist.*

Beispiel.

Wie groß ist der diskontierte Wert eines auf K 1.500·— lautenden und am 20. Oktober fälligen Wechsels, wenn er am 2. September zu 4 Prozent diskontiert wird?

Hier wäre $\frac{0}{s} = \frac{47}{360}$, $K_{\frac{0}{s}} = 1500$ und $i = 0{\cdot}04$.

Diskontiert man von 100, so erhält man für den diskontierten Wert des Wechsels

$$k' = 1500\left(1 - \frac{47}{9000}\right)$$

oder $k' = K$ 1.492·17; diskontiert man aber auf 100, so beträgt der diskontierte Wert

$$k = \frac{1500}{1 + \frac{47}{9000}}$$

oder $k = K$ 1.492·21. Der auf 100 diskontierte Wert des Wechsels ist immer, wenn auch nicht um vieles — in unserem Falle um h 4 — größer als der von 100 diskontierte Wert.

Zu dem allein richtigen Diskontowerte führt die Zinseszinsenrechnung. In diesem Falle ist der diskontierte Wert k eines nach n Jahren fälligen Kapitals K_n, mag n eine ganze oder gebrochene Zahl sein, durch die folgende Gleichung gegeben:

$$k = \frac{K_n}{(1 + i)^n}$$

oder

$$k = K_n v^n.$$

Subtrahiert man diesen diskontierten Wert k vom Kapital K_n, so erhält man den Diskonto

$$D = K_n - K_n v^n$$

oder

$$D = K_n (1 - v^n).$$

Für $K_n = 1$ und $n = 1$ geht der Diskonto D über in

$$d = 1 - v.$$

Die Zahl d bedeutet mithin *den Diskonto einer nach einem Jahr fälligen Kapitalseinheit.*

Bei $p = 3$ Prozent beträgt der Diskonto $d = 0{\cdot}02912621$,
„ $p = 3^1/_2$ „ „ „ „ $d = 0{\cdot}03381643$,
„ $p = 4$ „ „ „ „ $d = 0{\cdot}03846154$,
„ $p = 4^1/_2$ „ „ „ „ $d = 0{\cdot}04306220$ und
„ $p = 5$ „ „ „ „ $d = 0{\cdot}04761905$.

§ 8. *Mittlerer Zahlungstermin.*

Sind mehrere Kapitalien nach Ablauf verschiedener Zeiten fällig und zwar das Kapital k_1 nach n_1 Jahren, das Kapital k_2 nach n_2 Jahren usf., das Kapital k_s nach n_s Jahren, so nennt man jenen Zeitraum, nach welchem die Gesamtsumme k dieser Kapitalien

$$k = k_1 + k_2 + \cdots\cdots + k_s$$

ohne Gewinn oder Verlust an Zinsen auf einmal bezahlt werden könnte, den *mittleren Zahlungstermin.*

Bezeichnet man denselben mit x und nimmt i als Zinsfuß an, so muß man, um die gestellte Bedingung, nämlich daß der Gesamtbetrag ohne Gewinn oder Verlust an Zinsen auf einmal bezahlt wird, erfüllen zu können, den diskontierten Wert der Gesamtsumme der Summe der diskontierten Werte der einzelnen Kapitalien gleichsetzen.

Es besteht demnach die Gleichnng

$$k\,v^x = k_1\,v^{n_1} + k_2\,v^{n_2} + \cdots\cdots + k_s\,v^{n_s}$$

oder

$$k \cdot \frac{1}{r^x} = k_1\,v^{n_1} + k_2\,v^{n_2} + \cdots\cdots + k_s\,v^{n_s};$$

daraus folgt

$$r^r = \frac{k}{k_1\,v^{n_1} + k_2\,v^{n_2} + \cdots\cdots + k_s\,v^{n_s}}.$$

Logarithmiert man beide Teile dieser Gleichung, so erhält man

$$x \log r = \log k - \log\,[k_1\,v^{n_1} + k_2\,v^{n_2} + \cdots\cdots + k_s\,v^{n_s}],$$

woraus sich

$$x = \frac{\log k - \log\,[k_1\,v^{n_1} + k_2\,v^{n_2} + \cdots\cdots + k^s\,v^{n_s}]}{\log r} \text{ ergibt.}$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte von n. Sind jedoch die Zahlen n_1, n_2, ... n_s echte Brüche, so findet man, wenn man die einfache Verzinsung annimmt, den mittleren Zahlungstermin x mit ziemlich genauer Annäherung aus der Gleichung

$$\frac{k}{1 + x\,i} = \frac{k_1}{1 + n_1\,i} + \frac{k_2}{1 + n_2\,i} + \cdots\cdots + \frac{k_s}{1 + n_s\,i}.$$

Es ist nämlich der Wert für x, wenn wir die rechte Seite dieser Gleichung

$$\frac{k_1}{1 + n_1\,i} + \frac{k_2}{1 + n_2\,i} + \cdots\cdots + \frac{k_s}{1 + n_s\,i} = a \text{ setzen,}$$

$$x = \frac{k - a}{i\,a}.$$

Diskontiert man aber die einzelnen Kapitalien nach kaufmännischer Art, d. i. von 100, so erhält man

$$k\,(1 - x\,i) = k_1\,(1 - n_1\,i) + k_2\,(1 - n_2\,i) + \cdots\cdots + k_s\,(1 - n_s\,i)$$

und daraus

$$x = \frac{k_1\,n_1 + k_2\,n_2 + \cdots\cdots + k_s\,n_s}{k}$$

Wie man sieht, ist der Wert des unter Zugrundelegung der Zinseszinsen gefundenen und des durch einfache Verzinsung auf 100 berechneten mittleren Zahlungstermines x vom Zinsfuße i abhängig, während der nach kaufmännischer Art berechnete Zahlungstermin vom Zinsfuße i vollkommen unabhängig ist.

Beispiel.

Jemand kauft ein Haus um K 100.000·—, zahlt bar K 50.000·— und verpflichtet sich den Rest von K 50.000·— in folgenden Terminen zu zahlen und zwar:

K 25.000·— nach 3 Jahren,
K 15.000·— „ 5 „ und
K 10.000·— „ 7 „ .

Wann könnte er diese 3 Restzahlungen auf einmal begleichen, wenn $4^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

Hier wären $k_1 = 25.000$, $k_2 = 15.000$, $k_3 = 10.000$, $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $n_3 = 7$, $k = 50.000$ und $i = 0{\cdot}045$.

Die Barwerte der einzelnen Teilzahlungen betragen:

$$25000 \times 0{\cdot}87629660 = 21.907{\cdot}42$$
$$15000 \times 0{\cdot}80245105 = 12.036{\cdot}77$$
$$10000 \times 0{\cdot}73482846 = 7.348{\cdot}28.$$

Die Summe dieser Barwerte ist gleich K 41.292·47.

Aus der Gleichung

$$50000 \times v^x = 41.292{\cdot}47$$

oder

$$50000 \times \frac{1}{r^x} = 41.292{\cdot}47$$

ergibt sich

$$r^x = \frac{50000}{41292{\cdot}47} = 1{\cdot}21087453.$$

Berechnet man den Wert für x mit Hilfe der Tabelle I, so erhält man:

n	r^n	n	r^n
5	1·24618194	$4+y$	1·21087453
4	1·19251860	4	1·19251860
D	0·05366334	d	0·01835593

Man findet den Zuwachs y aus der Proportion

$$D:1=d:y$$

$$y=0{\cdot}01835593:0{\cdot}05366334=0{\cdot}34$$

und

$$x=4+y=4{\cdot}34.$$

Die logarithmische Berechnung des Wertes von x ergibt

$$x=\frac{\log 50000-\log 41292{\cdot}47}{\log 1{\cdot}045}$$

oder

$$x=0{\cdot}0830992:0{\cdot}0191163=4{\cdot}34.$$

Die ganze restliche Summe von K 50.000 würde nach 4·34 oder annähernd nach 4⅓ Jahren zu zahlen sein.

§ 9. *Endwert von in gleichen Zeitintervallen gemachten Einlagen.* Wird am Anfange eines jeden Zeitintervalls, wobei wir als Intervall ein Jahr nehmen, durch n Jahre ein bestimmter Betrag, z. B. k zum Zinsfuße i auf Zinseszinsen angelegt, so setzt sich der Endwert aller dieser Einlagen aus den Endwerten der einzelnen Einlagen zusammen.

Der Endwert der ersten Einlage beträgt $k\,r^n$, der zweiten Einlage $k\,r^{n-1}$ usf. und der letzten Einlage $k\,r$.

Mithin ist der Endwert E aller Einlagen

$$E=k\,r^n+k\,r^{n-1}+\cdots\cdots+k\,r.$$

Setzt man die Glieder der rechten Seite dieser Gleichung in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man

$$E=k\,r+k\,r^2+\cdots\cdots+k\,r^n$$

oder

$$E=k\,(r+r^2+\cdots\cdots+r^n).$$

Die Summe der in der Klammer befindlichen Aufzinsungsfaktoren bezeichnet man mit $s_{\overline{n|}}$ (lies: s mit dem Index n oder kurz $s\,n$ in rechtwinkliger Klammer), deren Werte für die gebräuchlichsten Prozentsätze aus der Tabelle III entnommen werden können.

Wenn man also $r+r^2+\cdots\cdots+r^n=s_{\overline{n|}}$ setzt, so ist

$$E=k\,.\,s_{\overline{n|}}.$$

Die rechte Seite der Gleichung

$$E=k\,r+k\,r^2+\cdots\cdots+k\,r^n$$

hat als Summenglied einer geometrischen Reihe den Wert

$$\frac{k\,(r^n-1)}{r-1}$$

oder auch, da $r-1=i$ ist, den Wert

$$\frac{k\,r\,(r^n-1)}{i}.$$

Mithin ist auch

$$E=\frac{k\,r\,(r^n-1)}{i}.$$

Werden die Einlagen nicht am Anfange, sondern am Ende jedes Jahres gemacht, so ist der Endwert der ersten Einlage $k\,r^{n-1}$, der zweiten Einlage $k\,r^{n-2}$, usf. der letzten Einlage k und der Endwert E' aller Einlagen

$$E'=k\,r^{n-1}+k\,r^{n-2}+\cdots\cdots+k.$$

Setzt man auch in dieser Gleichung die Glieder der rechten Seite in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man

$$E'=k+k\,r+\cdots\cdots+k\,r^{n-1}$$

oder

$$E'=k\,(1+r+\cdots\cdots+r^{n-1})$$

oder auch, da $r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}=s_{\overline{n-1|}}$ gesetzt werden kann,

$$E'=k\,(1+s_{\overline{n-1|}}).$$

Würde man jedoch für die rechte Seite der Gleichung

$$E'=k+k\,r+\cdots\cdots+k\,r^{n-1}$$

das Summenglied einer geometrischen Reihe einführen, so erhält man

$$E'=\frac{k\,(r^n-1)}{i}.$$

Aus den Gleichungen

$$E=\frac{k\,r\,(r^n-1)}{i}\quad\text{und}\quad E'=\frac{k\,(r^n-1)}{i}$$

kann man jede der vier Größen, E oder E', k, r und n aus den übrigen berechnen. Die Berechnung von r führt aber auf eine Gleichung $n$ten Grades, die man nur in einigen besonderen Fällen algebraisch aufzulösen imstande ist.

Beispiele.

1. Jemand legt am 1. Januar eines jeden Jahres K 200·— in eine Sparkasse ein. Welchen Wert werden seine Einlagen nach Ablauf von 15 Jahren haben, wenn 3½ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

Aus der Gleichung $E = k\, s_{\overline{n}|}$

oder $E = 200 \times s_{\overline{15}|}$

ergibt sich mit Hilfe der Tabelle III

$$E = K\, 3.994 \cdot 21.$$

Würde man jedoch auf dieses Beispiel die Gleichung

$$E = \frac{kr(r^n - 1)}{i}$$

anwenden, so erhält man

$$E = \frac{200 \times 1 \cdot 035\,(1 \cdot 67534883 - 1)}{0 \cdot 035}$$

oder

$$E = K\, 3.994 \cdot 21.$$

2. Jemand legt durch acht aufeinander folgende Jahre immer am Anfange eines jeden Jahres K 300·— und dann durch weitere fünf Jahre aber am Schlusse jedes Jahres K 200·— in eine Sparkasse ein. Über welches Kapital wird er unmittelbar nach der letzten Einlage verfügen, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

In diesem Falle ist der Endwert aller Einlagen, wenn man

$$k = 300 \text{ und } k' = 200 \text{ setzt,}$$

$$E = (k\,r^{13} + k\,r^{12} + \cdots\cdots + k\,r^6) + (k'\,r^4 + k'\,r^3 + \cdots\cdots + k')$$

oder

$$E = k\,(r^6 + r^7 + \cdots\cdots + r^{13}) + k'\,(1 + r + \cdots\cdots + r^4).$$

Nun ist aber

$$r^6 + r^7 + \cdots\cdots + r^{13} = (r + r^2 + \cdots\cdots + r^5 + r^6 + \cdots\cdots + r^{15}) - (r + r^2 + \cdots\cdots + r^5)$$

oder

$$r^6 + r^7 + \cdots\cdots + r^{13} = s_{\overline{13}|} - s_{\overline{5}|}.$$

Mithin ist der Endwert

$$E = 300\,(s_{\overline{13}|} - s_{\overline{5}|}) + 200\,(1 + s_{\overline{4}|})$$

und schließlich mit Zuhilfenahme der Tabelle III

$$E = K\, 4.580 \cdot 94.$$

3. Jemand gibt durch 10 Jahre halbjährig und zwar immer am Anfange eines jeden Halbjahres K 100·— in eine Sparkasse, welche die Einlagen mit 4 Prozent verzinst. Wie groß wird sein Guthaben nach Ablauf der 20 Halbjahre sein, unter der Voraussetzung, daß die Kapitalisierung halbjährig bei Anwendung des *konformen Zinsfußes* stattfindet?

Bezeichnen wir die Anzahl der Verzinsungstermine innerhalb eines Jahres mit m, die Anzahl der Jahre mit n und die jeweilige Einlage mit k, so ist der Endwert E aller dieser Einlagen

$$E = k\,r^n + k\,r^{n-\frac{1}{m}} + k\,r^{n-\frac{2}{m}} + \cdots\cdots + k\,r^{\frac{2}{m}} + k\,r^{\frac{1}{m}},$$

wobei $r^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{r}$ den konformen Aufzinsungsfaktor bedeutet.

Wenn man in dieser Gleichung die Glieder rechts vom Gleichheitszeichen in umgekehrter Reihenfolge setzt und $k\,r^{\frac{1}{m}}$ heraushebt, so erhält man

$$E = k\,r^{\frac{1}{m}}\left(1 + r^{\frac{1}{m}} + \cdots\cdots + r^{n-\frac{1}{m}}\right).$$

Der Klammerausdruck $1 + r^{\frac{1}{m}} + \cdots\cdots + r^{n-\frac{1}{m}}$ gibt als Summenglied einer geometrischen Reihe den Wert

$$\frac{r^n - 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1} = \frac{i}{r^{\frac{1}{m}} - 1}\;\frac{r^n - 1}{i}.$$

Nun ist aber $\frac{r^n - 1}{i}$ als Summenglied der geometrischen Reihe

$$1 + r + \cdots\cdots + r^{n-1} = 1 + s_{\overline{n-1}|},$$

daher geht der Klammerausdruck über in

$$\frac{i}{r^{\frac{1}{m}} - 1}\,(1 + s_{\overline{n-1}|})$$

und der Endwert E selbst in

$$E = \frac{k\,i\,r^{\frac{1}{m}}}{r^{\frac{1}{m}} - 1}\,(1 + s_{\overline{n-1}|}).$$

Für $m = 2$ und $r = 1 \cdot 04$ ist $r^{\frac{1}{m}} = \sqrt[2]{1 \cdot 04} = 1 \cdot 019804$.

Der Endwert ist mithin

$$E = \frac{100 \times 0 \cdot 04 \times 1 \cdot 019804}{1 \cdot 019804 - 1} \times 12 \cdot 00610712$$

oder

$$E = K\, 2.267 \cdot 03.$$

Würde man dieses Beispiel unter Zugrundelegung des *nominellen Zinsfußes* von 4 Prozent berechnen, so erhält man aus der Gleichung $E = k\, s_{\overline{n}|}$, wenn man darin die entsprechenden Werte für $k = 100$ und $s_{\overline{n}|} = 24 \cdot 78331719$, den man aus der Tabelle III unter $p = 2$ bei $r = 20$ entnehmen kann, einsetzt, den Wert für

$$E = 100 \times 24 \cdot 78331719$$

oder

$$E = 2.478 \cdot 33.$$

4. Welche jährliche Einlage müßte jemand durch 12 Jahre immer am Anfange eines jeden Jahres machen, damit er dann bei $3^1/_2$ prozentiger Verzinsung über ein Kapital von K 18.000·— verfügen kann?

Aus der Gleichung $E = k s_{\overline{n}|}$ findet man

$$k = \frac{E}{s_{\overline{n}|}}.$$

Wenn man darin für E und $s_{\overline{n}|}$ die entsprechenden Werte einsetzt, so erhält man

$$k = \frac{18000}{15{\cdot}11303030}$$

oder $$k = K\,1.191{\cdot}03.$$

§ 10. *Endwert eines auf Zinseszinsen angelegten Kapitals samt den in gleichen Zeitintervallen gemachten Einlagen.*

Wird ein Kapital K, das zu p Prozent auf Zinseszinsen angelegt ist, durch n Jahre am Anfange eines jeden Jahres um die Summe k vermehrt oder vermindert, so ist sein Wert am Ende des $n$ten Jahres

$$E = K r^n \pm k s_{\overline{n}|}$$

oder, wenn man für $k r^n + k r^{n-1} + \cdots\cdots + k r$ das Summenglied einer geometrischen Reihe anwendet

$$E = K r^n \pm k \frac{r(r^n - 1)}{i}.$$

Findet die Vermehrung oder Verminderung immer am Schlusse eines jeden Jahres statt, so hat das Kapital am Ende des $n$ten Jahres den Wert

$$E' = K r^n \pm k(1 + s_{\overline{n-1}|})$$

oder auch

$$E' = K r^n \pm k \frac{r^n - 1}{i}.$$

Wählt man das negative Zeichen, wonach das Kapital K um den Betrag k alljährlich vermindert wird, so muß einmal der Fall eintreten, wo das Kapital K infolge dieser Verminderung aufgezehrt wird. In diesem Falle ist der Endwert E gleich Null und man erhält, wenn die Verminderung am Anfange eines jeden Jahres stattfindet,

$$K r^n = k s_{\overline{n}|}$$

oder

$$K r^n = k \frac{r(r^n - 1)}{i}$$

und, wenn dieselbe am Schlusse eines jeden Jahres geschieht,

$$K r^n = k(1 + s_{\overline{n-1}|})$$

oder

$$K r^n = k \frac{r^n - 1}{i}.$$

Auch hier kann man aus diesen Gleichungen jede der fünf Größen E oder E', K, k, r und n berechnen, wenn vier davon gegeben sind.

Beispiel.

Jemand legt K 20.000·— in eine Sparkasse ein, welche Summe sie mit 4 Prozent verzinst. Welchen Betrag wird er durch 15 Jahre immer am Schlusse eines jeden Jahres beheben können?

Aus der Gleichung $K r^n = k(1 + s_{\overline{n-1}|})$ erhält man

$$k = \frac{K r^n}{1 + s_{\overline{n-1}|}},$$

welche Gleichung auf unser Beispiel angewendet den Wert für k gibt.

Es ist demnach $$k = \frac{20000 \times 1{\cdot}80094351}{1 + 19{\cdot}02358764}$$

oder $$k = K\,1.798{\cdot}82.$$

§ 11. *Begriff und Arten der Rente.*

Jede periodisch wiederkehrende Zahlung wird eine *Rente* genannt. Ist ihre Dauer im voraus bestimmt, so heißt sie eine *Zeitrente;* sie wird ohne Rücksicht darauf, ob der Rentenempfänger am Leben ist oder nicht, ausbezahlt. Dauert jedoch die Zahlung der Rente nur bis zum Tode des Empfängers, dann heißt die Rente eine *Leibrente.*

Gelangt die Rente immer am Anfange eines jeden Jahres (einer jeden Zeitperiode) zur Auszahlung, so heißt sie eine *vorschüssige* oder eine *pränumerando zahlbare Rente* oder auch eine *Pränumerando-Rente,* während die Rente, die am Ende eines jeden Jahres (einer jeden Zeitperiode) ausbezahlt wird, eine *nachschüssige* oder eine *postnumerando zahlbare Rente* oder auch eine *Postnumerando-Rente* genannt wird. Tritt der Rentenbesitzer erst nach Ablauf von mehreren Jahren (Zeitperioden) in den Bezug der Rente, so heißt eine solche Rente eine *aufgeschobene Rente.* Die Zeit zwischen dem Rentenkauf und dem Bezug der Rente wird die *Aufschubzeit* oder die *Wartezeit* genannt. Wird die Rente ohne Rücksicht auf die Zeitdauer fortwährend ausbezahlt, so heißt sie eine *ewige Rente;* sie kann eine *vorschüssige* oder eine *nachschüssige ewige Rente* sein.

Bleibt die Rente während ihrer Dauer oder ihrer Laufzeit unverändert, so heißt sie eine *konstante Rente* im Gegensatze zu einer *veränderlichen* oder *variablen Rente,* die nach einem bestimmten Gesetze,

meist in einer arithmetischen oder in einer geometrischen Progression zu- oder abnimmt.

Dienen die periodischen Zahlungen zur Tilgung einer aufgenommenen Schuld, so heißt eine solche Zahlung eine *Annuität.*

§ 12. *Endwert und Barwert von Renten.*

1. Der *Endwert* oder *Zeitwert* einer am *Anfange eines jeden Jahres* in der Höhe einer Kapitalseinheit z. B. einer Krone, einer Mark usf. zahlbaren Rente setzt sich aus den Endwerten der einzelnen Kapitalseinheiten zusammen, so daß die Rente nach Ablauf von n Jahren bei p-prozentiger Verzinsung den Wert hat

$$r^n + r^{n-1} + \cdots\cdots + r = s_{\overline{n}|} = \frac{r(r^n - 1)}{i}.$$

Ist der alljährlich zur Auszahlung gelangende Rentenbetrag nicht eine Kapitalseinheit, sondern R, so ist der Endwert E dieser Pränumerando-Rente

$$E = R s_{\overline{n}|}$$

oder auch

$$E = R\frac{r(r^n - 1)}{i}.$$

2. Der *Barwert* einer Pränumerando-Rente wird gefunden, indem man die Summe der Barwerte aller Auszahlungen bildet, welche am Anfange eines jeden Jahres immer in der Höhe einer Kapitalseinheit stattfinden. Der Barwert der ersten sofort zu zahlenden Kapitalseinheit ist gleich 1, der Barwert der zweiten erst nach einem Jahre zu zahlenden Kapitalseinheit gleich v usf. und der Barwert der am Anfange des $n$ten Jahres, also einer nach $(n-1)$ Jahren fälligen Kapitalseinheit gleich v^{n-1}. Bezeichnen wir den Barwert dieser Rente mit $a_{\overline{n}|}$, so ist

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + \cdots\cdots + v^{n-1}$$

oder

$$a_{\overline{n}|} = \frac{v^n - 1}{v - 1} = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

oder auch, wenn man für $1 - v$ den Diskonto d setzt,

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

Ist jedoch der Rentenbetrag R, so hat diese Pränumerando-Rente den Barwert

$$B = R \,.\, a_{\overline{n}|}$$

oder

$$B = R\frac{1 - v^n}{d}.$$

Nimmt man in der Gleichung $a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}$ für n den Wert ∞,

d. h. finden die Zahlungen in der Höhe einer Kapitalseinheit immerwährend statt, so ist der *Barwert einer* solchen *ewigen Pränumerando-Rente*

$$a_{\overline{\infty}|} = lim\left[\frac{1 - v^n}{d}\right]_{n=\infty}.$$

Nun ist aber, da $v < 1$ ist, $lim\,[v^n]_{n=\infty} = 0$, daher erhält man

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d}$$

oder, wenn man für $\frac{1}{d} = \frac{1}{1 - v} = \frac{1}{v(r-1)} = \frac{1}{v\,i}$ setzt,

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{v\,i}.$$

Für i gleich	0·03,	0·035,	0·04,	0·045,	0·05,
ist $a_{\overline{\infty}|}$ „	34·333,	29·571,	26·000,	23·222,	21·000.

Man findet auch den Barwert $a_{\overline{n}|}$, wenn man den Endwert $s_{\overline{n}|}$ abzinst oder diskontiert.

Es ist nämlich

$$a_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} \,.\, v^n$$

oder, um in Übereinstimmung mit der früher entwickelten Gleichung $a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}$ zu bringen,

$$a_{\overline{n}|} = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1} v^n = \frac{r^n v^n - v^n}{1 - \frac{1}{r}}$$

und endlich

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

3. Der *Endwert* einer durch n Jahre immer am *Schlusse eines jeden Jahres* in der Höhe einer Kapitalseinheit zahlbaren Rente ist bei p-prozentiger Verzinsung am Schlusse des $n$ten Jahres

$$r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots\cdots + r + 1 = 1 + s_{\overline{n-1}|} = \frac{r^n - 1}{i}.$$

Sind jedoch die alljährlich am Schlusse eines jeden Jahres stattfindenden Auszahlungen gleich R, so hat diese Postnumerando-Rente den Endwert

$$E' = R(1 + s_{\overline{n-1}|})$$

oder

$$E' = R\frac{r^n - 1}{i}.$$

Der *Barwert* der Postnumerando-Rente von einer Kapitalseinheit den wir mit $a_{\overline{n}|}$ bezeichnen, ist

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots\cdots + v^n$$

oder

$$a_{\overline{n}|} = \frac{v(1 - v^n)}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{\frac{1}{v} - 1}$$

oder auch

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}.$$

Um den Barwert B' einer Postnumerando-Rente zu finden, die jährlich in der Höhe von R Kapitalseinheiten zur Auszahlung gelangt, multipliziert man den soeben berechneten Barwert $a_{\overline{n}|}$ mit der Rente R.

Es ist also

$$B' = R \, . \, a_{\overline{n}|}$$

oder

$$B' = R \frac{1 - v^n}{i}.$$

Für $n = \infty$ erhält man, da $lim \, [v^n]_{n=\infty} = 0$ ist, für den *Barwert einer ewigen Postnumerando-Rente*

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}.$$

Für i	gleich	0·03,	0·035,	0·04,	0·045,	0·05,
ist $a_{\overline{\infty}|}$	„	33·333,	28·571,	25·000,	22·222,	20·000.

Bringt man den Barwert einer ewigen Pränumerando-Rente auf die Form

$$\mathrm{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d} = \frac{1}{1 - v} = \frac{r}{r - 1} = \frac{1 + i}{i} = 1 + \frac{1}{i}$$

und setzt darin für $\frac{1}{i}$ den Wert $a_{\overline{\infty}|}$, so erhält man, wie es schon aus den Zahlenbeispielen ersichtlich ist,

$$\mathrm{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + a_{\overline{\infty}|}.$$

Die ewige Pränumerando-Rente ist also um 1 größer als die ewige Postnumerando-Rente, während die Pränumerando-Rente um 1 größer ist als die um ein Jahr weniger laufende Postnumerando-Rente.

Es ist nämlich

$$\mathrm{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|},$$

wovon man sich durch Gleichstellung der Rentenbarwerte leicht überzeugen kann.

4. Der *Endwert einer* um m Jahre *aufgeschobenen* und dann n Jahre dauernden *Rente R*, deren erster Rentenbezug mithin in dem Momente stattfindet, wenn die Aufschubzeit abgelaufen ist, d. i. also am Anfange des $(m + 1)$ten Jahres, stimmt mit dem Endwerte einer Pränumerando-

Rente vollkommen überein. Es ist daher, wenn wir den Endwert dieser Rente mit $_{m|}E$ (lies: m Strich E) bezeichnen,

$$_{m|}E = R \, . \, s_{\overline{n}|}$$

oder

$$_{m|}E = R \frac{r(r^n - 1)}{i}.$$

5. Der *Barwert einer* um m Jahre *aufgeschobenen Rente*, die dann alljährlich durch n Jahre immer in der Höhe einer Kapitalseinheit ausbezahlt wird, kann analog den früher entwickelten Barwerten, als die Summe aus den Barwerten der durch n Jahre stattfindenden einzelnen Rentenbezügen dargestellt werden. Bezeichnen wir den Barwert dieser Rente mit $_{m|}\mathrm{a}_{\overline{n}|}$ (lies: m Strich a mit dem Index n oder kurz: m Strich a n in rechtwinkliger Klammer), so ist dessen Wert

$$_{m|}\mathrm{a}_{\overline{n}|} = v^m + v^{m+1} + \cdots\cdots + v^{m+n-1}$$

oder

$$_{m|}\mathrm{a}_{\overline{n}|} = v^{m-1}(v + v^2 + \cdots\cdots + v^n)$$

oder auch

$$_{m|}\mathrm{a}_{\overline{n}|} = v^{m-1} a_{\overline{n}|}$$

und wenn wir den Klammerausdruck $v + v^2 + \cdots\cdots + v^n$ durch das Summenglied einer geometrischen Reihe ausdrücken, so ist der Barwert

$$_{m|}\mathrm{a}_{\overline{n}|} = \frac{v^m(1 - v^n)}{d}.$$

Man kann aber auch

$$v^m + v^{m+1} + \cdots\cdots + v^{m+n-1} =$$

$$= (v + v^2 + \cdots\cdots + v^{m-1} + v^m + \cdots\cdots + v^{m+n-1}) - (v + v^2 + \cdots\cdots + v^{m-1}) =$$

$= a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|}$ setzen, so daß sich dann

$_{m|}\mathrm{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|}$ ergibt.

Beträgt die aufgeschobene Rente nicht eine, sondern R Kapitalseinheiten, so ist deren Barwert, den wir mit $_{m|}B$ bezeichnen,

$$_{m|}B = R v^{m-1} a_{\overline{n}|}$$

oder

$$_{m|}B = R \frac{v^m(1 - v^n)}{d}$$

oder auch

$$_{m|}B = R(a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|}).$$

6. Wird eine solche aufgeschobene Rente R nicht durch eine *einmalige Einlage*, die dem Barwerte der Rente, d. i. dem $_{m|}B$ gleich ist, erworben, sondern durch jährliche während der ganzen Aufschubzeit dauernden und am Anfange eines jeden Jahres stattfindenden Zahlungen, die man auch *Jahresprämien* nennt und mit $_{|m}P$ (lies: Strich m P) bezeichnet, so

findet man den Wert einer solchen Prämie, wenn man die Summe der Barwerte der zu zahlenden Jahresprämien dem Barwerte der Rente, d. i. dem $_{m|}B$ gleichsetzt. Unter der Voraussetzung, daß die Prämien ebenso wie die Rente mit dem Prozentsatze p verzinst werden, ist

$$_{|m}P + {}_{|m}Pv + \cdots\cdots + {}_{m}Pv^{m-1} = {}_{m|}B.$$

oder $$_{|m}P(1 + v + \cdots\cdots + v^{m-1}) = R\,(a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|}),$$

woraus sich

$$_{|m}P = \frac{R(a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|})}{1 + a_{\overline{m-1}|}},$$

ergibt.

Würde jedoch die Prämienzahlung unter sonst gleichen Bedingungen nicht durch m Jahre, sondern nur durch t Jahre, wobei $t < m$ ist, stattfinden, so wäre dann die Prämie

$$_{t}P = \frac{R\,(a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|})}{1 + a_{\overline{t-1}|}}.$$

Beispiele.

1. Jemand will eine 12 Jahre dauernde Postnumerando-Rente von K 2.500·— beziehen. Welchen Betrag hat er dafür auf einmal zu zahlen, wenn $3\frac{1}{2}$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

Hier wäre $R = 2.500·—$, $n = 12$ und $i = 0·035$.

Unter Anwendung der Gleichung

$$B' = R a_{\overline{n}|} \quad \text{oder} \quad B' = R\frac{1 - v^n}{i}$$

und mit Hilfe der Tabelle IV, welche für die gebräuchlichsten Zinsfüße die entsprechenden Werte von $a_{\overline{n}|}$ enthält, oder der Tabelle II erhält man als einmalige Einlage den Betrag von K 24.158·34.

2. Eine Stadt leiht bei einer Bank eine Summe von K 1,000.000·— und verpflichtet sich, diese Summe durch einen am Anfange eines jeden Jahres zahlbaren Betrag in 20 Jahren zu bezahlen. Wie groß ist bei $4\frac{1}{2}$prozentiger Verzinsung die Jahreszahlung?

Man findet aus der Gleichung $B = R\,a_{\overline{n}|}$ oder $B = R\,(1 + a_{\overline{n-1}|})$ den Wert für die Jahreszahlung

$$R = \frac{B}{1 + a_{\overline{n-1}|}}$$

oder nach Einsetzung der entsprechenden Werte

$$R = \frac{1000000}{1 + 12·5932\,9359}.$$

Die Stadt müßte jährlich K 73.565·69 zahlen.

3. Wie groß ist der Schätzungswert eines noch 8 Jahre (sogenannten) steuerfreien Hauses, dessen jährlicher Bruttozins im Durchschnitte K 3.740·— beträgt, wenn an Erhaltungskosten 15 Prozent, an Steuern während der Steuerfreiheit $26\frac{2}{3}$ und nach Ablauf derselben 48 Prozent des Bruttozinses in Abrechnung gebracht und der ganzen Berechnung $4\frac{1}{2}$ Prozent Zinseszinsen zugrunde gelegt werden?

Werden von dem Bruttozinse die volle Steuer und die Erhaltungskosten, insgesamt mit 63 Prozent abgezogen, so erhält man K 1.383·80. Dieser Nettozins von K 1.383·80 entspricht bei $4\frac{1}{2}$prozentiger Verzinsung einem Kapital von

$$\frac{1383·80 \times 100}{4·5}$$

d. i. von K 30.751·11. Dazu kommt noch, wenn man die Steuerfreiheit in Betracht zieht, der Barwert einer 8 Jahre dauernden Postnumerando-Rente von den $(48 - 26\frac{2}{3})$ Prozent des Bruttozinses, d. i. von $R = K\ 810\frac{1}{3}$.

Der Barwert dieser Rente, der nach der Gleichung

$$B' = R\,.\,a_{\overline{n}|}$$

berechnet wird, ist gleich K 5.344·87.

Mithin ergibt sich der Schätzungswert des Hauses, wenn man nur das Zinserträgnis allein berücksichtigt, durch Addition von K 30.751·11 und K 5.344·87. Er ist also gleich K 36.095·98.

4. Jemand zahlt durch 10 Jahre immer am Anfange eines jeden Jahres in eine Sparkasse K 1.500·— ein, um nach Ablauf dieser 10 Jahre eine 12 Jahre dauernde Rente zu beheben. Wie groß wird die Rente sein, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

Aus der Gleichung

$$_{m}P(1 + a_{\overline{m-1}|}) = R\,(a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|})$$

erhält man

$$R = \frac{_{|m}P(1 + a_{\overline{m-1}|})}{a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|}}$$

oder nach Einsetzung der entsprechenden Werte

$$R = \frac{1500\,(1 + 7·43533161)}{14·02915995 - 7·43533161}.$$

Die Rente beträgt K 1.989·02.

5. Jemand hat Anspruch auf eine nach 15 Jahren beginnende und durch 8 Jahre laufende Rente von K 3.000·—; er will jedoch dieselbe in eine sofort beginnende und 10 Jahre dauernde Rente verwandeln. Wie groß ist letztere bei $4\frac{1}{2}$prozentiger Verzinsung?

Durch Gleichstellung der Barwerte der beiden Renten erhält man, wenn man die zu berechnende Rente mit x bezeichnet,

$$x(1 + a_{\overline{l-1}|}) = R(a_{\overline{m+n-1}|} - a_{\overline{m-1}|})$$

oder

$$x(1 + a_{\overline{9}|}) = R(a_{\overline{22}|} - a_{\overline{14}|}).$$

Daraus findet man

$$x = \frac{3000\,(13{\cdot}78442476 - 10{\cdot}22282528)}{1 + 7{\cdot}26879050}$$

und für die Rente den Wert von K 1.292·18.

6. Jemand hat das Recht, eine durch eine gewisse Zeit am Anfange jedes Jahres zahlbare Rente von K 2.400·— zu beheben und will dieselbe in eine halbjährige am Schlusse eines jeden Halbjahres fällige Rente umwandeln. Wie groß wird diese Halbjahresrente sein, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

Bezeichnen wir die letztere Rente mit x und die Anzahl der Termine innerhalb eines Jahres mit m, so erhält man bei Anwendung des konformen Zinsfußes, wenn man den Barwert der gegebenen Rente der Summe der Barwerte der m unterjährigen Teilrenten gleichsetzt,

$$R = x\,v^{\frac{1}{m}} + x\,v^{\frac{2}{m}} + \cdots\cdots + x\,v^{\frac{m}{m}}$$

oder

$$R = x\,\frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v)}{1 - v^{\frac{1}{m}}}$$

oder auch, da $v^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{r^{\frac{1}{m}}}$ und $1 - v = d$ ist,

$$R = x\,\frac{d}{r^{\frac{1}{m}} - 1},$$

woraus sich

$$x = \frac{R\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right)}{d} \text{ ergibt.}$$

Nach Einsetzung der entsprechenden Werte findet man

$$x = \frac{2400\,.\,(1{\cdot}019804 - 1)}{0{\cdot}03846154}.$$

Führt man diese Rechnung aus, so erhält man für die gesuchte Rente den Betrag von K 1.235·77.

Würde man den nominellen Zinsfuß anwenden, so erhält man, wenn v' der entsprechende Abzinsungsfaktor bedeutet,

$$R = x\,v' + x\,(v')^2 + \cdots\cdots + x\,(v')^m$$

oder

$$R = x\,.\,a'_{\overline{m}|}.$$

Daraus ergibt sich $x = \frac{R}{a'_{\overline{m}|}}$

oder, wenn man darin für $a'_{\overline{m}|}$ den entsprechenden Wert aus der Tabelle IV unter $p = 2$ einsetzt

$$x = \frac{2400}{1{\cdot}94156094}.$$

Die Rente beträgt K 1.236·12. Wie man sieht, ist dieser Betrag nur um K 0·35 größer als der vorhin berechnete.

§ 13. *Veränderliche Renten.*

Wenn die Rente während der Zeit, in welcher die Zahlungen stattfinden, ihren Wert ändert, so heißt sie dann eine *veränderliche* oder eine *variable Rente*. Sie kann beliebig entweder zu oder abnehmen. Wir werden aber nur jene Fälle in Betracht ziehen, bei denen die Zu- oder Abnahme entweder nach einer arithmetischen oder geometrischen Progression stattfindet.

1. Nimmt die am Schlusse eines jeden Jahres fällige und mit R beginnende Rente alljährlich durch n Jahre um δ zu, so findet man ihren Barwert, den wir kurz mit a bezeichnen, wenn man die Summe der Barwerte der einzelnen Zahlungen, d. i. von

$$R, \quad R + \delta, \quad \cdots\cdots \quad R + (n-1)\,\delta \quad \text{bildet.}$$

Es ist also

$$a = R\,v + (R + \delta)\,v^2 + (R + 2\,\delta)\,v^3 + \cdots\cdots + [R + (n-2)\,\delta]\,v^{n-1} + \\ + [R\,(n-1)\,\delta]\,v^n.$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit v und subtrahiert dann die beiden Gleichungen voneinander, so erhält man zunächst

$$a\,v = R\,v^2 + (R + \delta)\,v^3 + (R + 2\,\delta)\,v^4 + \cdots\cdots + [R + (n-2)\,\delta]\,v^n + \\ + [R + (n-1)\,\delta]\,v^{n+1},$$

und

$$a\,(1 - v) = R\,v + \delta\,v^2 + \delta\,v^3 + \cdots\cdots + \delta\,v^n - [R + (n-1)\,\delta]\,v^{n+1}$$

oder

$$a\,(1 - v) = R\,v\,(1 - v^n) + \delta\,v\,(v + v^2 + \cdots\cdots + v^n) - n\,\delta\,v^{n+1}$$

oder auch, wenn man für $1 - v = \frac{r-1}{r} = i\,v$ und für $\frac{1 - v^n}{i} = a_{\overline{n}|}$ setzt,

$$a = R\,a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n\,v^n}{i}\,\delta.$$

Wie man sieht, ist der Barwert einer solchen Rente um

$$\frac{a_{\overline{n}|} - n v^n}{i} \delta$$

größer, als wenn die Rente während ihrer Dauer konstant geblieben wäre.

Nimmt die Rente ab statt zu, so nimmt man dann anstatt δ dessen negativen Wert, d. i. — δ und erhält als Barwert einer solchen Rente

$$a = R\, a_{\overline{n}|} - \frac{a_{\overline{n}|} - n v^n}{i} \delta.$$

Ist $R = 1$ und $\delta = 1$, d. h. betragen die aufeinander folgenden Zahlungen 1, 2, 3 ...... $(n-1)$ Kapitalseinheiten, so geht der Barwert a dieser steigenden Rente über in

$$(I\,a)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n v^n}{i}.$$

2. Steigt die mit R beginnende und am Schlusse eines jeden Jahres zahlbare Rente durch n Jahre um das $q$fache ihres vorhergehenden Wertes, so ist der Barwert dieser Rente

$$B = R v + R q v^2 + R q^2 v^3 + \cdots\cdots + R q^{n-1} v^n.$$

Wendet man auf die rechte Seite dieser Gleichung das Summenglied einer geometrischen Reihe an, so erhält man

$$B = R v \frac{1 - q^n v^n}{1 - q v}$$

oder

$$B = R \frac{1 - (q v)^n}{r - q}.$$

Für den Fall, daß $q v = v'$ ist, woraus sich $i' = \frac{r}{q} - 1 = \frac{1+i}{q} - 1$ ergibt, geht die rechte Seite der Gleichung

$$B = R v \frac{1 - q^n v^n}{1 - q v}$$

über in $R v \frac{1 - (v')^n}{1 - v'}$ oder, wenn man für $1 - v' = i' v' = i' q v$ setzt, in $\frac{R}{q} \cdot a'_{\overline{n}|}$ und man erhält dann den Barwert

$$B = \frac{R}{q} \cdot a'_{\overline{n}|}.$$

Beispiele.

1. Jemand kauft ein Haus, zahlt bar K 100.000·— und verpflichtet sich den Rest in 5 Jahresraten derart zu zahlen, daß die erste nach Ablauf eines Jahres fällige Rate K 10.000·— und jede folgende um K 500·— mehr als die vorhergehende beträgt. Wie groß ist der Kaufpreis des Hauses, wenn 5 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

Den Barwert des Restbetrages findet man unter Anwendung der Gleichung

$$a = R\, a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n v^n}{i} \delta.$$

Es ist also

$$a = 10000 \times 4{\cdot}32947667 + \frac{4{\cdot}32947667 - 5 \times 0{\cdot}78352617}{0{\cdot}05} \times 500$$

und man erhält, wenn man diese Rechnung ausführt, für den Barwert des Restbetrages K 47.413·23. Der Kaufpreis des Hauses beträgt mithin K 147.413·23.

2. Wie groß wäre der Kaufpreis des Hauses, wenn der Käufer bar K 100.000·— und den Rest in 5 Jahresraten bei einer 5prozentigen Verzinsung derart zahlt, daß die erste nach Ablauf eines Jahres fällige Rate K 10.000·—, während jede folgende um 4 Prozent mehr als die vorhergehende beträgt?

In diesem Falle ist der Barwert des Restbetrages

$$B = R \frac{1 - (q v)^n}{r - q}$$

oder nach Einsetzung der entsprechenden Werte

$$B = 10000 \frac{1 - \left(1{\cdot}04 \cdot \frac{1}{1{\cdot}05}\right)^5}{1{\cdot}05 - 1{\cdot}04}.$$

Nun ist aber $\left(\frac{1{\cdot}04}{1{\cdot}05}\right)^5 = \left(\frac{104}{105}\right)^5$ und logarithmisch ausgerechnet

$$\begin{aligned} \log 104 &= 2{\cdot}017\,0333 \\ \log 105 &= 2{\cdot}021\,1893 \\ \hline &\ 0{\cdot}995\,8440 - 1 \\ \hline \log\left(\frac{104}{105}\right)^5 &= 0{\cdot}979\,2200 - 1 \end{aligned}$$

ist $\left(\frac{1{\cdot}04}{1{\cdot}05}\right)^5 = 0{\cdot}9532\,7891.$

Der Barwert des Restbetrages ist gleich K 46.721·09 und der Kaufpreis des Hauses beträgt in dem Falle K 146.721·09.

2. Antizipative Verzinsung.

§ 14. *Endwert und Barwert eines Kapitals, Ermittlung des Prozentsatzes und der Anzahl der Verzinsungstermine.*

Wir haben bei allen bisher durchgeführten Rechnungen angenommen, daß die jeweiligen Zinsen immer am Schlusse eines jeden Jahres zum

Kapital zugeschlagen werden und nennen diese Art der Verzinsung eine *dekursive*. Doch kommt es vor, z. B. bei Wechseldiskont-, Darlehens-, Hypothekargeschäften usf., daß der Schuldner den festgesetzten Zins im voraus zahlen muß. Man nennt diese Art der Verzinsung im Gegensatze zu der früheren eine *antizipative Verzinsung*.

1. Bedeutet bei der antizipativen Verzinsung π den Prozentsatz und $\frac{\pi}{100}=j$ den Zinsfuß, so hat eine nach einem Jahre fällige Kapitalseinheit am Anfange des Jahres den um die Zinsen j verminderten Wert also $1-j$. Es wächst also $1-j$ nach einem Jahre auf 1 an und eine Einheit hat mithin nach einem Jahre den Wert $\frac{1}{1-j}=(1-j)^{-1}$, welchen Wert wir mit u bezeichnen. Die Kapitalseinheit wächst mithin nach Ablauf eines Jahres auf $u=\frac{1}{1-j}$, und das Kapital k auf ku oder $k\frac{1}{1-j}$ an.

Der Faktor u wird auch hier gerade so wie bei der dekursiven Verzinsung der *Aufzinsungsfaktor* genannt.

Es hat also eine Kapitalseinheit nach Ablauf eines Jahres bei antizipativer Verzinsung den Wert u, nach Ablauf zweier Jahre, d. i. am Schlusse des zweiten Jahres $u.u=u^2$ usw. und nach Ablauf von n Jahren, d. i. am Schlusse des $n$ten Jahres den Wert $u^{n-1}.u=u^n$.

Das Kapital k wird nach Ablauf von n Jahren am Schlusse des $n$ten Jahres den Wert

$$K'_n=k\,u^n$$

haben.

Verzinst man das Kapital k zu gleichem Zinsfuße j sowohl antizipativ als auch dekursiv, so erhält man bei antizipativer Verzinsung einen größeren Endwert als bei der dekursiven.

Denn nach n Jahren ist der Endwert bei antizipativer Verzinsung

$$K'_n=k\,u^n=k\left(\frac{1}{1-j}\right)^n=k\,(1-j)^{-n}$$

und bei dekursiver Verzinsung

$$K_n=k\,(1+j)^n.$$

Nun ist aber

$$(1-j)^{-1}=1:(1-j)=1+j+j^2+j^3+\cdots\cdots,$$

mithin ist

$$(1-j)^{-1}>1+j.$$

Potenziert man beide Seiten dieser Ungleichung mit n und multipliziert dann mit k, so erhält man

$$k\,(1-j)^{-n}>k\,(1+j)^n$$

oder

$$K'_n>K_n.$$

Aus der Gleichung $K'_n=k\,u^n=k\,(1-j)^{-n}$ kann man jede der vier Größen K'_n, k, j oder π und n berechnen, wenn drei davon gegeben sind.

2. So findet man k, d. i. den *gegenwärtigen Wert* oder den *Barwert* eines nach n Jahren fälligen Kapitals K'_n

$$k=\frac{K'_n}{u^n}=K'_n\cdot\frac{1}{u^n}=K'_n\,(1-j)^n$$

oder, wenn man $\frac{1}{u}=1-j=w$ setzt,

$$k=K'_n\,w^n.$$

Der Faktor w, der dem reziproken Werte des Aufzinsungsfaktors gleich ist, wird auch bei der antizipativen Verzinsung der *Abzinsungsfaktor* genannt.

3. Sind die Größen K'_n, k und n gegeben, so findet man zunächst den entsprechenden Abzinsungsfaktor

$$w^n=\frac{k}{K'_n}$$

und daraus den Wert für den Zinsfuß

$$j=1-\sqrt[n]{\frac{k}{K'_n}}.$$

Für den Prozentsatz π erhält man den Wert

$$\pi=\left(1-\sqrt[n]{\frac{k}{K'_n}}\right)100.$$

4. Wenn die Größen K'_n, k und π oder j gegeben sind, so erhält man aus der Gleichung

$$u^n=\frac{K'_n}{k}\quad\text{oder aus der Gleichung}\quad w^n=\frac{k}{K'_n}$$

den Wert für

$$n=\frac{\log K'_n-\log k}{\log u}\quad\text{oder}\quad n=\frac{\log k-\log K'_n}{\log w}.$$

Beispiele.

1. Welchen Betrag erreichen K 16.000·— in 12 Jahren bei $3^1/_2$prozentiger, antizipativer Verzinsung?

Wendet man hier die Gleichung $K'_n=k\,u^n$ an, so erhält man mit Benützung der Tabelle I, die auch antizipative Aufzinsungsfaktoren enthält, für die verlangte Summe den Betrag von K 24.535·35. Wird statt antizipativer Verzinsung eine dekursive vorausgesetzt, so wachsen die K 16.000·— bei $3^1/_2$prozentiger Verzinsung in 12 Jahren auf den Betrag von K 24.177·10 an.

2. Wie groß ist der Barwert eines nach 6 Jahren fälligen Kapitals von K 14.500·—, wenn 4 Prozent antizipative Zinseszinsen gerechnet werden?

Rechnet man den Barwert nach der Gleichung $k = K'_n w^n$ und benützt hiebei die Tabelle II, so erhält man dafür K 11.349·99.

3. Wie lange war ein Kapital von K 8.000·— bei $4^1/_2$prozentiger, antizipativer Verzinsung auf Zinseszinsen angelegt, wenn es nach dieser Zeit den Betrag von K 12.976·78 erreicht hat?

Aus der Gleichung $K'_n = k u^n$ ergibt sich für den entsprechenden Aufzinsungsfaktor der Wert

$$u^n = 1{\cdot}62209763$$

und aus der Tabelle I erhält man

n	u^n	n	u^n
11	1·6594 4519	$10 + x$	1·6220 9763
10	1·5847 7016	10	1·5847 7016
D	0·0746 7503	d	0·0373 2747

mittelst der Proportion $D : 1 = d : x$ zunächst den Wert für

$$x = 0{\cdot}03732747 : 0{\cdot}07467503 = 0{\cdot}499$$

und für $\qquad n = 10{\cdot}499$ oder rund $10^1/_2$ Jahre.

Wenn man aber n logarithmisch berechnet, so bekommt man

$$\log 12976{\cdot}78 = 4{\cdot}113\,1669$$
$$\log 8000 \quad = 3{\cdot}903\,0900$$
$$n = 0{\cdot}210\,0769 : 0{\cdot}019\,9966$$

Die Division ergibt für n den Wert 10·5 oder auch $10^1/_2$ Jahre.

§ 15. *Beziehung zwischen dem antizipativen und dekursiven Zinsfuße.* Eine Kapitalseinheit wächst bei dekursiver Verzinsung zum Zinsfuße $i = \frac{p}{100}$ in einem Jahre auf $1 + i = 1 + \frac{p}{100}$ und bei antizipativer Verzinsung zum Zinsfuße $j = \frac{\pi}{100}$ auf $\frac{1}{1-j} = \frac{100}{100 - \pi}$ an. Durch Gleichstellung der beiden Endwerte der Kapitalseinheit erhält man

$$1 + i = \frac{1}{1-j},$$

woraus sich der Zinsfuß

$$i = \frac{j}{1-j}$$

ergibt.

Für den Prozentsatz p bekommt man

$$p = \frac{100\,\pi}{100 - \pi},$$

d. i. jenen Prozentsatz, zu welchem ein Kapital dekursiv verzinst, denselben Endwert gibt, wie in der gleichen Zeitperiode bei antizipativer Verzinsung zum Prozentsatze π. Wir können daher mit Hilfe der Gleichung $p = \frac{100\,\pi}{100 - \pi}$ jede antizipative Verzinsung in eine dekursive verwandeln.

Wäre i und mithin auch p bekannt, so erhält man aus

$$\frac{1}{1-j} = 1 + i$$

zunächst

$$j = \frac{i}{1+i}$$

und dann

$$\pi = \frac{100\,p}{100 + p}.$$

Dem Zinsfuße j gleich

0·03, 0·035, 0·04, 0·045, 0·05

entspricht der äquivalente Zinsfuß i gleich

0·0309278, 0·0362694, 0·0416667, 0·0471204, 0·0526316

und dem Zinsfuße i gleich

0·03, 0·035, 0·04, 0·045, 0·05

entspricht der äquivalente Zinsfuß j gleich

0·0291262, 0·0338164, 0·0381616, 0·0430622, 0·0476190.

Beispiel.

Welchen Endwert hat ein Kapital von K 12.000·— bei 4prozentiger, antizipativer Verzinsung und welchen bei der äquivalenten, $4^1/_6$prozentigen dekursiven Verzinsung nach Ablauf von 10 Jahren?

Wird das Kapital antizipativ mit 4 Prozent verzinst, so erhält man nach der Gleichung $K'_n = k u^n$ als Endwert den Betrag von K 18.049·66, während man bei der äquivalenten, $4^1/_6$prozentigen dekursiven Verzinsung nach der Gleichung $K_n = k r^n$ zunächst

$$\log 1{\cdot}041\,6667 = 0{\cdot}0177\,2877$$
$$10 \log 1{\cdot}041\,6667 = 0{\cdot}177\,2877$$
$$1{\cdot}041\,6667^{10} = 1{\cdot}50\,4138$$

und dann zum Endwerte den gleichen Betrag, d. i. K 18.049·66 bekommt.

§ 16. *Nomineller und konformer Zinsfuß. Periodisch wiederkehrende Zahlungen.*

Wird ein Kapital k zum antizipativen Zinsfuß ζ pro Jahr derart auf Zinseszinsen angelegt, daß für jeden $m$ten Teil des Jahres der Zinsfuß proportional der Zeit also $\frac{\zeta}{m}$ beträgt, so hat das Kapital nach Ablauf eines Jahres den Wert

$$k\left(1-\frac{\zeta}{m}\right)^{-m}.$$

Der Zinsfuß ζ wird der *nominelle antizipative Zinsfuß* genannt. Um nun den *wirklichen antizipativen Zinsfuß* j pro Jahr zu berechnen, zu welchem das Kapital k auf Zinseszinsen angelegt werden müßte, um denselben Endwert zu geben, setzt man

$$k(1-j)^{-1}=k\left(1-\frac{\zeta}{m}\right)^{-m}$$

und erhält daraus

$$j=1-\left(1-\frac{\zeta}{m}\right)^{m}.$$

In der folgenden Tabelle findet man die Werte für den wirklichen antizipativen Zinsfuß für $m=2$, 4 und 12, wenn der nominelle antizipative Zinsfuß gegeben ist.

Nomineller antizipativer Zinsfuß ζ	Wirklicher antizipativer Zinsfuß j		
	$m=2$	$m=4$	$m=12$
0·03	0·029775	0·029664	0·029591
0·035	0·034694	0·044543	0·034444
0·04	0·039600	0·039404	0·039274
0·045	0·044494	0·044246	0 044083
0·05	0·049375	0·049071	0 048869

Ist das Kapital k auf Zinseszinsen zum antizipativen Zinsfuße η für einen $m$ten Teil des Jahres angelegt, d. h. betragen die Zinsen pro Kapitalseinheit für jeden $m$ten Teil des Jahres η, so hat das Kapital k am Ende eines Jahres, das aus m Verzinsungsterminen besteht, den Wert

$$k(1-\eta)^{-m}.$$

Wird das Kapital ganzjährig zum antizipativen Zinsfuße j verzinst, so hat es am Schlusse eines Jahres den Wert

$$k(1-j)^{-1}.$$

Aus der Gleichstellung der beiden Werte erhält man zunächst

$$k(1-\eta)^{-m}=k(1-j)^{-1}$$

und dann

$$\eta=1-\sqrt[m]{1-j}.$$

Der Zinsfuß η, zu welchem also ein Kapital $m$teljährig und antizipativ verzinst werden muß, um nach 1, 2, 3, ... n Jahren denselben Endwert zu geben, wie wenn es zum antizipativen Zinsfuße j ganzjährig verzinst worden wäre, wird der *konforme antizipative Zinsfuß* genannt.

Folgende Tabelle enthält die Werte des konformen antizipativen Zinsfußes für $m=2$, 4 und 12, wenn der ganzjährige antizipative Zinsfuß gegeben ist.

Ganzjähriger antizipativer Zinsfuß j	Konformer antizipativer Zinsfuß η		
	$m=2$	$m=4$	$m=12$
0·03	0 015114	0·007586	0·002535
0·035	0·017656	0·008867	0·002965
0·04	0·020204	0·010154	0·003396
0·045	0·022759	0·011445	0·003830
0·05	0·025321	0·012741	0·004265

Für periodisch wiederkehrende Zahlungen mit antizipativer Verzinsung gelten bei der Berechnung des End- oder Barwertes genau dieselben Grundsätze, wie bei der Berechnung mit dekursiver Verzinsung.

So z. B. beträgt der Endwert eines am Anfange eines jeden Jahres durch n Jahre zahlbaren Kapitals k bei π-prozentiger, antizipativer Verzinsung

$$E=k\,u^n+k\,u^{n-1}+\cdots\cdots+k\,u$$

oder, wenn man die Glieder der rechten Seite dieser Gleichung in umgekehrter Reihenfolge setzt, k heraushebt und auf den Klammerausdruck das Summenglied einer geometrischen Reihe anwendet,

$$E=k\,(u+u^2+\cdots\cdots+u^n)=k\,\frac{u^n-1}{j}.$$

Bezeichnen wir den Klammerausdruck $u+u^2+\cdots\cdots+u^n$ mit $s_{\overline{n}|}$, so erhält man

$$E=k\,.\,s_{\overline{n}|}\,.$$

Die Werte von $s_{\overline{n}|}$, d. i. von der Summe der antizipativen Aufzinsungsfaktoren entnimmt man aus der Tabelle III.

Um den Barwert eines am Schlusse eines jeden Jahres durch n Jahre zahlbaren Kapitals k bei π-prozentiger, antizipativer Verzinsung zu finden, bildet man die Summe der Barwerte der einzelnen Zahlungen und erhält dadurch

$$B=k\,w+k\,w^2+\cdots\cdots+k\,w^n$$

oder $B = k(w + w^2 + \cdots\cdots + w^n) = k w \frac{1 - w^n}{j}$

oder auch, wenn man den Klammerausdruck $w + w^2 + \cdots\cdots + w^n$ mit $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ bezeichnet,

$$B = k \ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

Die Werte von der Summe der antizipativen Abzinsungsfaktoren $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ entnimmt man aus der Tabelle IV.

Beispiel.

Wie groß ist bei $4^1/_2$prozentiger, antizipativer Verzinsung der Barwert einer durch 10 Jahre am Schlusse eines jeden Jahres stattfindenden Zahlung von K 2.400·—?

Berechnet man den Barwert nach der Gleichung

$$B = k \ddot{a}_{\overline{n}|} \text{ oder } B = k w \frac{1 - w^n}{j},$$

so erhält man in beiden Fällen dafür den Betrag von K 18.794·08.

3. Tilgungspläne bei dekursiver Verzinsung.

§ 17. *Tilgung eines ausgeliehenen Kapitals bei konstanter Annuitätenzahlung.*

Bei der Aufnahme einer Anleihe wird neben der Höhe des Zinsfußes, zu welchem die Anleihe verzinst wird, auch die Art der Rückzahlung bestimmt. Von den vielen mannigfaltigen Arten der Rückzahlung wollen wir jedoch nur jene am häufigsten vorkommenden Fälle behandeln, bei welchen der alljährlich zur Rückzahlung der Anleihe verwendete Betrag während der ganzen Dauer der Anleihe konstant bleibt oder nach einem bestimmten Gesetze, z. B. nach einer arithmetischen Progression sich verändert. Dieser Betrag, der *Annuität* heißt, muß derart berechnet werden, daß er den periodischen Zinsenzahlungen genügt und außerdem die ganze Anleihe in der gegebenen Zeit amortisiert.

Jemand macht z. B. eine Anleihe von k Kapitalseinheiten und will sie in n Jahren bei p-prozentiger Verzinsung in der Weise zurückzahlen, daß er am Ende eines jeden Jahres eine bestimmte Annuität c bezahlt.

Es handelt sich vor allem darum, den Wert dieser Annuität c zu bestimmen. Man findet dieselbe, wenn wir das aufgenommene Kapital k der Summe der Barwerte der einzelnen Annuitäten gleichsetzen.

Es ist mithin

$$k = c v + c v^2 + \cdots\cdots + c v^n$$

oder

$$k = c(v + v^2 + \cdots\cdots + v^n)$$

oder auch $k = c \frac{1 - v^n}{i}$

oder endlich $k = c a_{\overline{n}|}$,

woraus man für die Annuität den Wert

$$c = \frac{k i}{1 - v^n} \text{ oder } c = \frac{k}{a_{\overline{n}|}} = k \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \text{ erhält.}$$

Die Werte für $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ enthält die Tabelle V.

Führt man in der Gleichung $c = \frac{k i}{1 - v^n}$ für den Abzinsungsfaktor v den Wert $\frac{1}{r}$ ein, so bekommt man

$$c = \frac{k i r^n}{r^n - 1}.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist bei der Aufstellung des Tilgungsplanes die Kenntnis des Schuldrestes unmittelbar nach der $m$ten Annuitätenzahlung. Bezeichnen wir diese Größe der Schuld mit S_m, so ist offenbar

$$S_m = k r^m - (c r^{m-1} + c r^{m-1} + \cdots\cdots + c r + c)$$

oder

$$S_m = k r^m - c(1 + s_{\overline{m-1}|})$$

oder auch

$$S_m = k r^m - c \frac{r^m - 1}{i}.$$

Diese Gleichung geht nach Einsetzung des Wertes von $c = \frac{k i r^n}{r^n - 1}$ in die rechte Seite derselben über in

$$S_m = k \frac{r^n - r^m}{r^n - 1}.$$

Für $m = 0$, erhält man k und für $m = n$ den Wert Null, wie es auch der Tatsache entspricht.

Ebenso findet man den Wert für die Schuld unmittelbar nach der $(m - 1)$ten Annuitätenzahlung

$$S_{m-1} = k r^{m-1} - c \frac{r^{m-1} - 1}{i}.$$

Bildet man nun die Differenz zwischen den Schuldresten nach der $(m - 1)$ten und der $m$ten Annuitätenzahlung, so erhält man den bei der $m$ten Annuitätenzahlung mit inbegriffenen Betrag, der zur Tilgung der Schuld dient und die *Tilgungsquote* heißt. Bezeichnen wir dieselbe mit t_m, so ist

$$t_m = k r^{m-1} - c \frac{r^{m-1} - 1}{i} - k r^m + c \frac{r^m - 1}{i}.$$

Hebt man auf der rechten Seite der Gleichung aus dem 4. und 2. Gliede $\frac{c}{i}$ und aus dem 3. und 1. Gliede k heraus, so erhält man

$$t_m = \frac{c}{i}(r^m - r^{m-1}) - k(r^m - r^{m-1})$$

oder
$$t_m = (c - k\,i)\frac{r^m - r^{m-1}}{i}$$

oder auch
$$t_m = (c - k\,i)\frac{r^{m-1}(r-1)}{i}$$

und schließlich
$$t_m = (c - k\,i)\,r^{m-1}.$$

Für $m = 1, 2, \ldots\ldots n$, findet man:

$$t_1 = c - k\,i,$$
$$t_2 = (c - k\,i)\,r \qquad \text{oder} \quad t_2 = t_1 r,$$
$$t_3 = (c - k\,i)\,r^2 \qquad \text{„} \quad t_3 = t_2 r = t_1 r^2,$$
$$\vdots$$
$$t_n = (c - k\,i)\,r^{n-1} \qquad \text{„} \quad t_n = t_{n-1} r = t_1 r^{n-1}.$$

Wie man sieht, bilden die jährlichen Tilgungsquoten eine steigende geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede t_1 und dem Quotienten

$$r = 1 + i.$$

Die Summe aller Tilgungsquoten gibt

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = (c - k\,i) + (c - k\,i)\,r + \cdots\cdots + (c - k\,i)\,r^{n-1}$$

oder
$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = (c - k\,i)\frac{r^n - 1}{i}.$$

Substituiert man hierin für c den Wert $\frac{k\,i\,r^n}{r^n - 1}$, so bekommt man

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = \frac{k\,i}{r^n - 1}\cdot\frac{r^n - 1}{i}$$

oder
$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = k.$$

Die Summe aller Tilgungsquoten gibt die aufgenommene Schuld k, wie es auch der Fall sein muß, da ja doch die ganze Schuld in n Jahren durch die Annuitätenzahlungen getilgt wird.

Drückt man die Glieder $t_2, t_3, \ldots\ldots t_n$ der letzten Gleichung durch das Anfangsglied t_1 und durch den Quotienten r aus, so erhält man

$$t_1 + t_1 r + \cdots\cdots + t_1 r^{n-1} = k$$

oder
$$t_1(1 + r + \cdots\cdots + r^{n-1}) = k.$$

Dafür kann man nun

$$t_1(1 + s_{\overline{n-1|}}) = k$$

oder
$$t_1\frac{r^n - 1}{i} = k$$

setzen, woraus sich die erste Tilgungsquote, ohne die Größe der Annuität selbst zu kennen, ergibt.

Es ist nämlich $t_1 = \frac{k}{1 + s_{\overline{n-1|}}}$ oder $t_1 = \frac{k\,i}{r^n - 1}$.

Jede folgende Tilgungsquote findet man durch Multiplikation der vorhergehenden Quote mit dem Aufzinsungsfaktor r; so wäre z. B.

$$t_m = t_{m-1}\,r.$$

Da nach der $m$ten Annuitätenzahlung die aufgenommene Schuld k um die m ersten Tilgungsquoten geringer ist, so ergibt sich aus der Gleichung

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_m + t_{m+1} + \cdots\cdots + t_n = k$$

für den Schuldrest S_m unmittelbar nach der $m$ten Annuitätenzahlung

$$S_m = k - (t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_m).$$

Drückt man darin $t_2, t_3, \ldots\ldots t_m$ durch t_1 und r aus, so erhält man

$$S_m = k - t_1(1 + r + r^2 + \cdots\cdots + r^{m-1})$$

oder
$$S_m = k - t_1(1 + s_{\overline{m-1|}})$$

oder auch
$$S_m = k - t_1\frac{r^m - 1}{i}.$$

Den Tilgungsplan selbst kann man tabellarisch folgendermaßen aufstellen:

$$\text{Annuität } c = k\,\frac{1}{a_{\overline{n|}}}.$$

Jahr (1)	Schuld am Anfange des Jahres (2)	p-prozentige Zinsen am Schlusse des Jahres (3)	Tilgungsquote am Schlusse des Jahres (4)
1	k	$k\,i$	$t_1 = c - k\,i$
2	$k - t_1$	$(k - t_1)\,i$	$t_2 = t_1 r$
3	$k - t_1 - t_2$	$(k - t_1 - t_2)\,i$	$t_3 = t_2 r$
$\vdots$			
n	$k - t_1 - t_2 - \cdots\cdots - t_{n-1}$	$(k - t_1 - \cdots\cdots - t_{n-1})\,i$	$t_n = t_{n-1} r$
			$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = k$

Beispiele.

1. Eine Schuld von K 100.000·— soll durch gleiche Annuitäten bei einer 5prozentigen Verzinsung in 4 Jahren getilgt werden. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan?

Nach der Gleichung $c = k \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ findet man mit Hilfe der Tabelle V für die Annuität den Betrag von K 28.201·18_3.

Der Tilgungsplan lautet:

Annuität $c = K$ 20.201·18

Jahr (1)	Schuld am Anfange des Jahres (2)	5prozentige Zinsen am Schlusse des Jahres (3)	Tilgungsquote am Schlusse des Jahres (4)
1	K 100.000·—	K 5.000·—	K 23.201·18
2	K 76.798·82	K 3.839·94	K 24.361·24
3	K 52 437·58	K 2.621·88	K 25.579·30
4	K 26.858·28	K 1.342·90	K 26.858·28
			K 100.000·00

2. Eine Schuld von K 500.000·— soll durch gleiche Annuitäten bei einer 4prozentigen Verzinsung in 36 Jahren getilgt werden. Wie lautet der Tilgungsplan der ersten und der letzten 2 Jahre?

Um den Tilgungsplan der ersten 2 Jahre aufzustellen, müssen wir vor allem die Annuität berechnen; sie ist gleich K 26.443·44. Die Subtraktion der 4prozentigen Zinsen der Schuld von der Annuität gibt die erste Tilgungsquote, welche von der aufgenommenen Schuld subtrahiert die Schuld am Anfange des 2. Jahres gibt usw.

Um aber den Tilgungsplan der letzten 2 Jahre, d. i. des 35. und 36. Jahres aufzustellen, müssen wir die Schuld am Anfange des 35. Jahres, d. i. unmittelbar nach der 34. Annuitätenzahlung kennen.

Diese Schuld kann entweder nach der Gleichung

$$S_m = k\, r^m - c\,(1 + s_{\overline{m-1}|})$$

oder nach der Gleichung

$$S_m = k - t_1\,(1 + s_{\overline{m-1}|})$$

berechnet werden.

In beiden Fällen erhält man dafür K 49.874·76. Die weitere Durchführung der Rechnung beim Aufstellen des Tilgungsplanes entnimmt man aus der nachfolgenden Tabelle.

Annuität $c = K$ 26.443·44.

Jahr (1)	Schuld am Anfange des Jahres (2)	4prozentige Zinsen am Schlusse des Jahres (3)	Tilgungsquote am Schlusse des Jahres (4)
1	K 500.000·—	K 20.000·—	K 6.443·44
2	K 493.556·56	K 19.742·26	K 6.701·18
⋮	⋮	⋮	⋮
35	K 49.874·76	K 1.994.99	K 24.448·45
36	K 25.426·31	K 1.017·05	K 25.426·39

In diesem Beispiele stimmt die letzte Tilgungsquote bis auf eine unbedeutende Differenz von 8 h mit dem Schuldreste am Anfange des letzten Jahres überein.

§ 18. *Tilgung eines ausgeliehenen Kapitals bei gegebener meist in Prozenten des Kapitals ausgedrückten Annuitätenzahlung.*

Ist die Annnität, die gewöhnlich in Prozenten des Kapitals ausgedrückt ist, im vorhinein gegeben, so kann man den Tilgungsplan ohne weiteres sofort aufstellen; doch empfiehlt es sich vorerst die Anzahl der Annuitätenzahlungen und den Schuldrest am Anfange des letzten Jahres zu berechnen.

Bezeichnet man die Prozente des Kapitals, durch welche die Annuität ausgedrückt wird, mit p', wobei $p' > p$ sein muß, so erhält man für die Annuität den Wert $c = k\, i'$. Substituiert man diesen Wert für c in die Gleichung

$$c = k \frac{i}{1 - v^n} \quad \text{oder} \quad c = \frac{k}{a_{\overline{n}|}}$$

also

$$k\, i' = k \frac{i}{1 - v^n} \quad \text{oder} \quad k\, i' = \frac{k}{a_{\overline{n}|}},$$

so findet man daraus nach gehöriger Reduktion für n den Wert

$$n = \frac{\log p' - \log (p' - p)}{\log r}$$

oder, wenn man mit Tabellen rechnet, für die Summe der Abzinsungsfaktoren den Wert

$$a_{\overline{n}|} = \frac{100}{p'}.$$

Die Zahl n wird im allgemeinen keine ganze Zahl sein, sie wird z. B. größer als m und kleiner als $(m + 1)$ sein, wobei m eine positive ganze Zahl bedeutet. Da die Anzahl der Annuitätenzahlungen

aber eine ganze Zahl sein muß, so gelangt die Schuld erst nach $(m+1)$ Jahren zur Tilgung und der Betrag, der am Schlusse des $(m+1)$ten Jahres bezahlt wird, hat einen kleineren Wert als die Annuität $c=ki'$; er setzt sich in diesem Falle aus dem Schuldreste am Anfange des $(m+1)$ten Jahres und dessen einjährigen Zinsen zusammen.

Nach der $m$ten Annuitätenzahlung beträgt die Schuld

$$S_m = k\,r^m - k\,i'\,\frac{r^m - 1}{i}$$

oder

$$S_m = k\left[r^m - \frac{p'}{p}(r^m - 1)\right]$$

oder auch

$$S_m = \frac{k}{p}\,[p' - (p' - p)\,r^m]\,.$$

Das Gesamterfordernis des $(m+1)$ten Jahres ist mithin gleich

$$S_m + S_m\,i \quad \text{oder} \quad S_m\,r.$$

Beispiel.

Eine Schuld von K 63.000·— soll bei 4prozentiger, dekursiver Verzinsung derart getilgt werden, daß alljährlich 18 Prozent des Anlehens, d. i. K 3.500·— am Schlusse eines jeden Jahres als Annuität gezahlt werden. Wie lautet der Tilgungsplan?

Die Anzahl der Annuitätenzahlungen findet man nach der Gleichung

$$n = \frac{\log p' - \log(p' - p)}{\log r}$$

durch Einsetzung der entsprechenden Werte

$$n = \frac{\log 18 - \log 14}{\log 1{\cdot}04} = 6{\cdot}41.$$

Die Schuld kann mithin, da n eine ganze Zahl sein muß, erst in 7 Jahren getilgt werden.

Die Zahl n kann auch mit Tabelle IV folgendermaßen berechnet werden:

$$a_{\overline{n|}} = \frac{100}{18} = 5{\cdot}5555\,5556$$

n	$a_{\overline{n\vert}}$	n	$a_{\overline{n\vert}}$
7	6·0020 5467	$6+x$	5·5555 5556
6	5·2421 3686	6	5·2421 3686
D	0·7599 1781	d	0·3134 1870

Den Wert für x findet man aus der Proportion

$$D : 1 = d : x;$$

es ist also

$$x = 0{\cdot}41.$$

Wie man sieht, ergibt sich auch nach dieser Art der Berechnung für n der Wert von 6·41 Jahren.

Die Schuld unmittelbar nach der 6. Annuitätenzahlung beträgt

$$S_6 = \frac{63000}{4}\,[18 - (18 - 4)\,1{\cdot}2653\,1902]$$

oder

$$S_6 = K\ 4.497{\cdot}16.$$

Das Gesamterfordernis am Schlusse des 7. Jahres setzt sich aus S_6 und $S_6\,i$ oder aus K 4.497·16 und K 179·89 zusammen; es ist mithin gleich K 4.677·05.

Der diesbezügliche Tilgungsplan hat folgende Form:

Annuität $c = K$ 11.340·—

Jahr (1)	Schuld am Anfange des Jahres (2)	4prozentige dekursive Zinsen (3)	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres (4)	Gesamterfordernis am Schluß des Jahres: Summe aus (3) und (4) (5)
1	K 63.000·—	K 2.520·—	K 8.820·—	K 11.340·—
2	K 54.180·—	K 2.167·20	K 9.172·80	K 11.340·—
3	K 45.007·20	K 1.800·29	K 9.539·71	K 11.340·—
4	K 35.467·49	K 1.418·70	K 9.921·30	K 11.340·—
5	K 25.546·19	K 1.021·85	K 10.318·15	K 11.340·—
6	K 15.228·04	K 609·12	K 10.730·88	K 11.340·—
7	K 4.497·16	K 179·89	K 4.497·16	K 4.677·05
			K 63.000·00	

§ 19. *Tilgung eines Anlehens bei Ausgabe von Obligationen.*

Wenn ein Staat, ein Land, eine Gemeinde oder eine Privatgesellschaft zu irgend einem Zwecke eine größere Anleihe macht, so wird der leichteren Begebung wegen der ganze Schuldbetrag in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile geteilt und für jeden dieser mit fortlaufenden Nummern versehenen Teile ein Schuldschein, eine sogenannte *Obligation* ausgestellt. Diese Schuldscheine lauten meistens auf runde Beträge, wie z. B. K 100·—, K 500·— oder K 1.000·— usw.; der Betrag, auf den eine Obligation lautet, wird der *Nennwert* der Obligation genannt. In dem Schuldscheine verpflichtet sich der Schuldner, die Zinsen alljährlich nach einem bestimmten, in der Obligation genau angegebenen Prozentsatze zu bezahlen und die Obligationen innerhalb einer bestimmten Reihe von Jahren durch Verlosung einzulösen.

Bei der Emission eines Anlehens in Obligationen werden dieselben gewöhnlich nicht zu ihrem Nennwerte auf den Markt gebracht. Der *Umlaufswert* oder *Kurswert* richtet sich vielmehr nach äußeren mannigfaltigen Umständen, so nach dem Angebot und Nachfrage ähnlicher

Wertpapiere, nach dem Geldmangel oder Geldüberfluß, nach politischen, administrativen und anderen oft ganz unbewußten Einflüssen.

Die Rückzahlung der ausgelosten Obligationen geschieht entweder zu den gleichen Terminen wie die Zinsenzahlungen oder auch weniger oft. So werden z. B. die Coupons der meisten Eisenbahnobligationen halbjährig bezahlt, während die Rückzahlung der ausgelosten Obligationen nur einmal im Jahre stattfindet.

Eine Anleihe k, die in m Obligationen, jede mit dem Nennwerte C geteilt ist, soll bei p-prozentiger, dekursiver Verzinsung in n Jahren derart getilgt werden, daß jede ausgeloste Obligation mit C', man sagt mit einem *Aufgelde*, eingelöst wird. Die Verzinsung und die Einlösung der Obligationen finden am Ende eines jeden Jahres statt.

Es soll der Tilgungsplan dieser Anleihe aufgestellt werden. Wir bezeichnen die Anzahl der am Schlusse des 1., 2., ... $n$ten Jahres ausgelosten Obligationen mit $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ und die am Ende eines jeden Jahres zu zahlende Annuität mit c. Dadurch, daß jede Obligation mit C' eingelöst wird, verzinst sich das vom Schuldner tatsächlich zu bezahlende Kapital $\frac{C'k}{C}$ nicht zu p Prozent, sondern, weil die Prozente im umgekehrten Verhältnisse zum Kapitalsfaktor $\frac{C'}{C}$ stehen, zu $\frac{Cp}{C'}$ Prozent. Der Aufzinsungsfaktor, den wir mit q bezeichnen, ist mithin

$$q = 1 + \frac{Cp}{C'100} \quad \text{oder} \quad q = 1 + \frac{Ci}{C'}.$$

Um die Annuität c zu berechnen, setzt man den Endwert des Kapitals $\frac{C'k}{C}$ gleich der Summe der Endwerte sämtlicher Annuitäten.

Es ist als

$$\frac{C'k}{C} q^n = c q^{n-1} + c q^{n-2} + \cdots\cdots + c q + c$$

oder

$$\frac{C'k}{C} q^n = c \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Daraus erhält man den Wert für die Annuität

$$c = \frac{C' k q^n}{C} \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

oder, wenn man hierin für $q - 1$ den Wert $\frac{Ci}{C'}$ einsetzt,

$$c = \frac{k i q^n}{q^n - 1}.$$

Eine analoge Betrachtung führt auch dazu, die Schuld S_m unmittelbar nach der $m$ten Annuitätenzahlung zu berechnen.

Sie ist nämlich

$$S_m = \frac{C'k}{C} q^m - c \frac{q^m - 1}{q - 1}.$$

Ebenso ist die Schuld unmittelbar nach der $(m-1)$ten Annuitätenzahlung

$$S_{m-1} = \frac{C'k}{C} q^{m-1} - c \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1}.$$

Bildet man die Differenz zwischen den Schuldresten nach der $(m-1)$ten und der $m$ten Annuitätenzahlung, so erhält man jenen Betrag $x_m C'$, der zur Einlösung der am Schlusse des $m$ten Jahres ausgelosten x_m Obligationen dient.

Es ist also

$$x_m C' = \frac{C'k}{C} q^{m-1} - c \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1} - \frac{C'k}{C} q^m + c \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

oder

$$x_m C' = \frac{c q^{m-1}}{q - 1} (q - 1) - \frac{C' k q^{m-1}}{C} (q - 1)$$

oder auch

$$x_m C' = c q^{m-1} - k i q^{m-1}$$

oder endlich

$$x_m C' = (c - k i) q^{m-1}.$$

Für $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$, erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 C' &= c - k i, & & \\ x_2 C' &= (c - k i) q & \text{oder } x_2 &= x_1 q, \\ x_3 C' &= (c - k i) q^2 & \text{„ } x_3 &= x_2 q = x_1 q^2, \\ &\vdots & & \\ x_n C' &= (c - k i) q^{n-1} & \text{„ } x_n &= x_{n-1} q = x_1 q^{n-1}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, gebildet aus den am Schlusse eines jedes Jahres zur Einlösung gelangenden Obligationen, Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten

$$q = 1 + \frac{Ci}{C'}.$$

Nun ist aber $x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = m$ und man erhält, wenn man darin $x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ durch x_1 und durch q ausdrückt,

$$x_1 + x_1 q + x_1 q^2 + \cdots\cdots + x_1 q^{n-1} = m$$

und hieraus

$$x_1 = \frac{m(q-1)}{q^n - 1}$$

oder $$x_1 = \frac{m\,C\,i}{C'\,(q^n - 1)}$$

nnd, da $m\,C = k$ ist,

$$x_1 = \frac{k\,i}{C'\,(q^n - 1)}.$$

Die Werte für x_1, x_2, ... x_n werden im allgemeinen keine ganzen Zahlen sein und müssen, da Bruchteile von Obligationen *nie* eingelöst werden können, zu ganzen Zahlen abgerundet werden.

Die der *m*ten Annuitätenzahlung entsprechende Tilgungsquote t_m findet man, wenn man die am Schlusse des *m*ten Jahres ausgeloste Anzahl von x_m Obligationen, welche man aus der Gleichung

$$x_m\,C' = (c - k\,i)\,q^{m-1}$$

erhält, mit dem Nennwerte der Obligation, d. i. mit C multipliziert.

Es ist also $t_m = x_m\,C = \frac{C\,(c - k\,i)\,q^{m-1}}{C'}$.

Setzen wir darin für $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$, so bekommt man:

$$t_1 = x_1\,C = \frac{C\,(c - k\,i)}{C'},$$

$$t_2 = x_2\,C = \frac{C\,(c - k\,i)}{C'}\,q \qquad \text{oder} \quad t_2 = t_1\,q,$$

$$t_3 = x_3\,C = \frac{C\,(c - k\,i)}{C'}\,q^2 \qquad \text{„} \quad t_3 = t_2\,q = t_1\,q^2,$$

$$\vdots$$

$$t_n = x_n\,C = \frac{C\,(c - k\,i)}{C'}\,q^{n-1} \qquad \text{„} \quad t_n = t_{n-1}\,q = t_1\,q^{n-1}.$$

Wenn wir die Tilgungsquoten, die eine geometrische Reihe mit dem Quotienten q bilden, addieren, so erhält man

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = \frac{C\,(c - k\,i)}{C'} + \frac{C\,(c - k\,i)}{C'}\,q + \cdots\cdots + \frac{C\,(c - k\,i)}{C'}\,q^{n-1}$$

oder

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = \frac{C\,(c - k\,i)}{C'}\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

oder auch

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = (c - k\,i)\,\frac{q^n - 1}{i}.$$

Setzt man in diese Gleichung für c den Wert $\frac{k\,i\,q^n}{q^n - 1}$ ein, so bekommt man

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = \left(\frac{k\,i\,q^n}{q^n - 1} - k\,i\right)\frac{q^n - 1}{i}$$

oder

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = k.$$

Wie man sieht, ist die Summe der Tilgungsquoten gleich der aufgenommenen Schuld k.

Drückt man in der Gleichung

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = k$$

die Glieder $t_2, t_3, \ldots\ldots t_n$ durch das Anfangsglied t_1 und den Quotienten q aus, so erhält man

$$t_1 + t_1\,q + t_1\,q^2 + \cdots\cdots + t_1\,q^{n-1} = k$$

oder

$$\frac{t_1\,(q^n - 1)}{q - 1} = k$$

und daraus $$t_1 = \frac{k\,(q - 1)}{q^n - 1}$$

oder $$t_1 = \frac{k\,C\,i}{C'\,(q^n - 1)}.$$

Für den allgemeinen Fall, wo das Anlehen in Obligationen abgeteilt ist, sieht der Tilgungsplan folgendermaßen aus (siehe Tabelle auf S. 52):

Beispiel.

Eine Schuld von K 1,000.000·— soll in 5 Jahren bei 4prozentiger, dekursiver Verzinsung getilgt werden. Die Schuld ist in 10.000 Obligationen à K 100·— abgeteilt. Jede ausgeloste Obligation wird mit K 105·— eingelöst. Wie lautet der Tilgungsplan?

Vor Aufstellung des Tilgungsplanes berechnet man zuerst die Annuität und die entsprechenden Werte für die am Schlusse jedes Jahres zur Auslosung gelangende Anzahl der Obligationen.

In unserem Falle ist $q = 1 + \frac{4}{105}$ oder $q = \frac{109}{105}$ und $q^5 = 1{\cdot}20555213$.

Für die Annuität erhält man mithin den Wert

$$c = \frac{1000000 \times 0{\cdot}04 \times 1{\cdot}20555213}{0{\cdot}20555213}$$

oder $$c = K\ 234.597{\cdot}84.$$

Den Wert für x_1 findet man aus der Gleichung

$$x_1 = \frac{40000}{105 \times 0{\cdot}20555213},$$

$$\text{Annuität } c = \frac{k\, i\, q^n}{q^n - 1}$$

Jahr	Zahl der am Anfange des Jahres vorhandenen Obligationen	Zahl der am Ende des Jahres ausgelosten Obligationen	Die auf den Schluß des Jahres bezogene Tilgungsquote	p-prozentige dekursive Zinsen	Rückzahlungsbetrag für die ausgelosten Obligationen	Gesamterfordernis: Summe aus (5) und (6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	m	$x_1 = \frac{m(q-1)}{q^n-1}$	$t_1 = x_1 C$	$k\,i$	$x_1 C'$	$k\,i + x_1 C'$
2	$m - x_1$	$x_2 = x_1 q$	$t_2 = x_2 C$	$(k - x_1 C)\,i$	$x_2 C'$	$(k - x_1 C)\,i + x_2 C'$
3	$m - x_1 - x_2$	$x_3 = x_2 q$	$t_3 = x_3 C$	$(k - x_1 C - x_2 C)\,i$	$x_3 C'$	$(k - x_1 C - x_2 C)\,i + x_3 C'$
⋮			⋮		⋮	⋮
n	$m - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$	$x_n = x_{n-1} q$	$t_n = x_n C$	$(k - x_1 C - \cdots x_{n-1} C)\,i$	$x_n C'$	$(k - x_1 C - \cdots x_{n-1} C)\,i + x_n C'$
		$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$	$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = k$		$x_1 C' + \cdots + x_n C' = \frac{k C'}{C}$	

während man die Werte der folgenden x durch Multiplikation des vorhergehenden Wertes für x mit q erhält.

Demnach ist:

$x_1 = 1.853{\cdot}31$ oder auf Ganze abgerundet $x_1 = 1.854$,
$x_2 = 1.923{\cdot}92$ „ „ „ „ $x_2 = 1.924$,
$x_3 = 1.997{\cdot}21$ „ „ „ „ $x_3 = 1.997$,
$x_4 = 2.073{\cdot}29$ „ „ „ „ $x_4 = 2.073$,
$x_5 = 2.152{\cdot}27$ „ „ „ „ $x_5 = 2.152$.

Der Tilgungsplan sieht daher folgendermaßen aus:

Annuität $c = K\ 234.597{\cdot}84$

Jahr	Zahl der Obligationen am Anfange des Jahres	Zahl der am Schlusse des Jahres ausgelosten Obligationen	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres	4prozentige dekursive Zinsen	Rückzahlungsbetrag für die ausgelosten Obligationen	Gesamterfordernis: Summe aus (5) und (6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	10.000	1.854	K 185.400·—	K 40.000·—	K 194.670·—	K 234.670·—
2	8.146	1.924	K 192.400·—	K 32.584·—	K 202.020·—	K 234.604·—
3	6.222	1.997	K 199.700·—	K 24.888·—	K 209.685·—	K 234.573·—
4	4.225	2.073	K 207.300·—	K 16.900·—	K 217·665·—	K 234.565·—
5	2.152	2.152	K 215.200·—	K 8.608·—	K 225.960·—	K 234.568·—
		10.000	K 1,000.000·—		K 1,050·000·—	

Da, wie bereits erwähnt, Bruchteile von Obligationen nie eingelöst werden können, daher die Zahl der ausgelosten Obligationen nach oben oder nach unten abgerundet werden muß, so ergeben sich zwischen den einzelnen Gesamterfordernissen und der Annuität Differenzen, die teils positiv, teils negativ sind.

Diese Differenzen müssen mit p Prozent verzinst, von der nächsten Annuität subtrahiert oder zu ihr addiert werden, je nachdem sie positiv oder negativ sind. Man erhält dadurch eigentlich keine konstante, sondern eine veränderliche Annuität.

Ist $C' = C$, d. h. werden die Obligationen zum Nennwerte eingelöst, so stellen sich die Berechnungen der Werte für $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ und der Annuität c besonders einfach.

Denn man findet, da $q = 1 + i = r$ ist,

$$x_2 = x_1 r,$$
$$x_3 = x_2 r \quad = x_1 r^2,$$

$$x_n = x_{n-1} r = x_1 r^{n-1} \text{ und}$$

aus der Gleichung $x_1 + x_1 r^2 + \cdots\cdots + x_1 r^{n-1} = m$ die Anzahl der am Schlusse des 1. Jahres ausgelosten Obligationen

$$x_1 = \frac{m\,i}{r^n - 1} \quad \text{oder} \quad x_1 = \frac{m}{1 + s_{\overline{n-1}|}}$$

und die Annuität

$$c = \frac{k\,i\,r^n}{r^n - 1}$$

oder

$$c = \frac{k\,i}{1 - v^n}$$

oder auch

$$c = \frac{k}{a_{\overline{n}|}} = k\frac{1}{a_{\overline{n}|}}.$$

Beispiel.

Eine Schuld von K 1,000.000·— soll bei 4prozentiger, dekursiver Verzinsung in 5 Jahren getilgt werden. Diese Schuld ist in 10.000 Obligationen à K 100·— abgeteilt. Jede ausgeloste Obligation wird zum Nennwerte, d. i. mit K 100·— eingelöst. Wie lautet der Tilgungsplan?

Für die Annuität erhält man aus der Gleichung $c = k\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ mit Hilfe der Tabelle V den Wert von K 224.627·11.

Ebenso findet man mit Hilfe der Gleichung $x_1 = \frac{m}{1 + s_{\overline{n-1}|}}$ und der Tabelle III den Wert für die am Ende des 1. Jahres ausgelosten Obligationen $x_1 = 1.846·27$. Die übrigen Werte für x erhält man durch die sukzessive Multiplikation mit $r = 1·04$ und bekommt auf diese Weise:

$$\begin{aligned} \text{für } x_2 &= 1.920·12, \\ \text{„ } x_3 &= 1.996·93, \\ \text{„ } x_4 &= 2.076·81 \\ \text{und für } x_5 &= 2.159·88. \end{aligned}$$

Rundet man die einzelnen Werte für x auf Ganze ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.846, \\ x_2 &= 1.920, \\ x_3 &= 1.997, \\ x_4 &= 2.077 \\ \text{und } x_5 &= 2.160. \end{aligned}$$

Der Tilgungsplan selbst hat nun folgende Form:

Annuität $c = K$ 224.627·11.

Jahr (1)	Anzahl der am Anfange des Jahres vorhandenen Obligationen (2)	Zahl der am Schluß des Jahres ausgelosten Obligationen (3)	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres (4)	4prozentige dekursive Zinsen (5)	Rückzahlungsbetrag für die ausgelosten Obligationen (6)	Gesamterfordernis: Summe aus (5) und (6) (7)
1	10.000	1.846	K 184.600·—	K 40.000·—	K 184.600·—	K 224.600·—
2	8.154	1.920	K 192.000·—	K 32.616·—	K 192.000·—	K 224.616·—
3	6.234	1.997	K 199.700·—	K 24.936·—	K 199.700·—	K 224.636·—
4	4 237	2.077	K 207.700·—	K 16.948·—	K 207.700·—	K 224·648·—
5	2.160	2.160	K 216.000·—	K 8.640·—	K 216.000·—	K 224.640·—
		10.000	K 1,000.000·—		K 1,000.000·—	

Hinsichtlich der zwischen den einzelnen Gesamterfordernissen und der Annuität auftretenden Differenzen gilt dasselbe, was bereits im früheren Beispiele erwähnt wurde.

§ 20. *Tilgung eines ausgeliehenen Kapitals bei zu- oder abnehmender Annuitätenzahlung.*

Soll ein Anlehen k durch eine am Schlusse eines jeden Jahres fällige, mit dem Betrage c beginnende und dann alljährlich um δ steigende Annuität in n Jahren bei p-prozentiger, dekursiver Verzinsung getilgt werden, so haben wir, um die Annuität zu berechnen, nur den Barwert des Anlehens, d. i. k der Summe der Barwerte der einzelnen Annuitätenzahlungen von c, $c + \delta$, ... $c + (n - 1)\delta$ gleichzusetzen. Man erhält also

$$k = c\,v + (c + \delta)\,v^2 + \cdots\cdots + [c + (n - 1)\,\delta]\,v^n.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat, wie man aus S. 31 entnehmen kann, den Wert

$$c\,a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n\,v^n}{i}\,\delta.$$

Mithin ist

$$k = c\,a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n\,v^n}{i}\,\delta,$$

woraus sich

$$c = \left(k + \frac{n\,\delta\,v^n}{i}\right)\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{\delta}{i}$$

ergibt.

Setzt man in dieser Gleichung $\delta = 0$, so erhält man eine konstante Annuität mit dem Werte

$$c = k \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|}}.$$

Ist die erste Annuität c gegeben, so findet man aus der Gleichung

$$c\,a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n\,v^n}{i}\,\delta = k$$

den Wert für die Zunahme

$$\delta = \frac{(k - c\,a_{\overline{n}|})\,i}{a_{\overline{n}|} - n\,v^n}.$$

Nimmt die Annuität c jährlich um δ ab statt zu, so ist anstatt δ dessen negativer Wert, d. i. $-\delta$ zu setzen.

Beispiel.

Eine Anleihe von K 1,000.000·— soll bei 4prozentiger, dekursiver Verzinsung in 5 Jahren durch Jahreszahlungen derart getilgt werden, daß dieselben von Jahr zu Jahr um K 10.000·— zunehmen. Wie groß sind diese Jahreszahlungen und wie lautet der Tilgungsplan?

Die erste Jahreszahlung findet man nach der Gleichung

$$c = \left(k + \frac{n\,\delta\,v^n}{i}\right)\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{\delta}{i}.$$

Durch Einsetzung der entsprechenden Werte erhält man nach durchgeführter Rechnung für die erste Jahreszahlung den Betrag von K 205.410·998 oder rund K 205.411·—. Die zweite ist, wie die folgenden, um K 10.000 größer; sie betragen mithin der Reihe nach:

K 215.411·—, K 225.411·—, K 235.411·— und K 245.411·—.

Die Aufstellung des Tilgungsplanes begegnet nunmehr keiner Schwierigkeit; er lautet:

Erste Annuität $c = K$ 205.411·—.

Jahr (1)	Schuld zu Beginn des Jahres (2)	4prozentige dekursive Zinsen (3)	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres (4)	Jahreszahlungen: Summe aus (3) und (4) (5)
1	K 1,000.000·—	K 40.000·—	K 165.411·—	K 205.411·—
2	K 834.589·—	K 33.383·56	K 182.027·44	K 215.411·—
3	K 652.561·56	K 26.102·44	K 199.308·56	K 225.411·—
4	K 453.253·—	K 18.130·12	K 217.280·88	K 235.411·—
5	K 235.972·12	K 9.438·88	K 235.972·12	K 245.411·—
			K 1,000.000·00	

Soll dasselbe Anlehen bei gleicher Verzinsung in 5 Jahren durch Annuitäten getilgt werden, die von Jahr zu Jahr um 5 Prozent zu-

nehmen, so erhält man die erste Annuität, wenn man 1·05 mit q bezeichnet, aus der Gleichung

$$k = c\,v + c\,q\,v^2 + c\,q^2 v^3 + \cdots\cdots + c\,q^{n-1} v^n$$

oder

$$k = c\,v\,\frac{(q\,v)^n - 1}{q\,v - 1}.$$

Daraus ergibt sich für die Annuität c der Wert

$$c = \frac{k\,(q - r)}{(q\,v)^n - 1}$$

oder

$$c = \frac{1000000\,(1{\cdot}05 - 1{\cdot}04)}{1{\cdot}0490\,1041 - 1}$$

oder endlich $c = K$ 204.038·28. Durch fortgesetzte Multiplikation mit $q = 1{\cdot}05$ erhält man die Werte der übrigen Jahreszahlungen und zwar:

für die 2. Jahreszahlung K 214.240·19,
„ „ 3. „ K 224.952·20,
„ „ 4. „ K 236.199·81,
und „ „ 5. „ K 248.009·80.

Der Tilgungsplan hat nunmehr folgende Form:

Erste Annuität $c = K$ 204.038·28.

Jahr (1)	Schuld am Anfange des Jahres (2)	4prozentige dekursive Zinse (3)	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres (4)	Jahreszahlungen: Summe aus (3) und (4) (5)
1	K 1,000.000·—	K 40.000·—	K 164.038·28	K 204.038·28
2	K 835.961·72	K 33·438·47	K 180.801·72	K 214 240·19
3	K 655.160·—	K 26.206·40	K 198.745·80	K 224.952·20
4	K 456.414·20	K 18.256·57	K 217.943·24	K 236.199·81
5	K 238.470·96	K 9.538·84	K 238.470·96	K 248.009·80
			K 1 000.000·00	

4. Tilgungspläne bei antizipativer Verzinsung.

§ 21. *Tilgung eines ausgeglichenen Kapitals bei konstanter Annuitätenzahlung.*

Wird ein Anlehen k, welches meistens ein Hypothekardarlehen, d. i. ein Darlehen auf Realitäten oder Grundstücke ist, gegen eine π-prozentige antizipative Verzinsung derart aufgenommen, daß am Schlusse eines jeden Jahres durch n Jahre eine konstante Annuität bezahlt wird, so ist der Barwert dieses Anlehens nicht gleich k, sondern

gleich dem um dessen einjährige Zinsen verminderten Kapital, d. i. $k - kj$ oder kw. Setzt man nun diesen Barwert gleich der Summe der Barwerte von allen am Schlusse eines jeden Jahres fälligen Annuitäten, so erhält man eine Gleichung, aus der sich die Annuität c, wie folgt, berechnen läßt.

Es ist nämlich

$$kw = cw + cw^2 + \cdots\cdots + cw^n$$

oder, wenn man c als Faktor heraushebt,

$$kw = c(w + w^2 + \cdots\cdots + w^n).$$

Nun ist aber die Summe der Abzinsungsfaktoren

$$w + w^2 + \cdots\cdots + w^n = a_{\overline{n}|}$$

oder auch als Summenglied einer geometrischen Reihe gleich $\frac{w(1 - w^n)}{j}$, daher ist,

$$kw = c\, a_{\overline{n}|} \quad \text{oder} \quad kw = c\, w \frac{1 - w^n}{j},$$

woraus sich c leicht bestimmen läßt; es ist

$$c = k \cdot \frac{w}{a_{\overline{n}|}} \quad \text{oder} \quad c = \frac{kj}{1 - w^n},$$

welche Gleichung nach Substitution des Wertes von $w = \frac{1}{u}$ auch auf die Form

$$c = \frac{kju^n}{u^n - 1}$$

gebracht werden kann.

Bei der Berechnung der Schuld unmittelbar nach der $m$ten Annuitätenzahlung muß man den Fall berücksichtigen, daß dieselbe erst am Schlusse des nächsten Jahres, d. i. des $(m + 1)$ten Jahres zur Amortisation gelangt. Es beträgt mithin die Schuld, wenn man sie mit S_m bezeichnet,

$$S_m = (kw)u^{m+1} - (cu^m + cu^{m-1} + \cdots\cdots + cu)$$

oder, wenn man c heraushebt und für $u + u^2 + \cdots\cdots + u^m$ den Wert $s_{\overline{m}|}$ setzt,

$$S_m = ku^m - c\, s_{\overline{m}|}$$

oder auch

$$S_m = ku^m - c\frac{u(u^m - 1)}{u - 1}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner des zweiten Gliedes auf der

rechten Seite dieser Gleichung durch u und setzt für $1 - \frac{1}{u} = 1 - w$ den Wert j ein, so erhält man

$$S_m = ku^m - c\frac{u^m - 1}{j}.$$

Ebenso findet man die Schuld unmittelbar nach der $(m - 1)$ten Annuitätenzahlung

$$S_{m-1} = ku^{m-1} - c\frac{u^{m-1} - 1}{j}.$$

Subtrahiert man von dieser Schuld die nach der $m$ten Annuitätenzahlung vorhandene Schuld, so erhält man die entsprechende Tilgungsquote

$$t_m = ku^{m-1} - c\frac{u^{m-1} - 1}{j} - ku^m + c\frac{u^m - 1}{j}$$

oder

$$t_m = \frac{c}{j}(u^m - u^{m-1}) - k(u^m - u^{m-1})$$

oder auch

$$t_m = \frac{c - kj}{j}\left(1 - \frac{1}{u}\right)u^m$$

und endlich

$$t_m = (c - kj)\, u^m.$$

Setzt man in dieser Gleichung für $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$, so erhält man:

$$t_1 = (c - kj)\, u,$$
$$t_2 = (c - kj)\, u^2 \quad \text{oder} \quad t_2 = t_1 u,$$
$$t_3 = (c - kj)\, u^3 \quad \text{„} \quad t_3 = t_2 u = t_1 u^2,$$
$$t_n = (c - kj)\, u^n \quad \text{„} \quad t_n = t_{n-1} u = t_1 u^{n-1}.$$

Die aufeinander folgenden Tilgungsquoten bilden, wie man sieht, eine geometrische Reihe mit dem Anfangsgliede t_1, dem Quotienten $u = \frac{1}{1 - j}$ und dem Endgliede t_n, welches, wie aus dem folgenden entnommen werden kann, der Annuität c gleich sein muß.

Die Gleichung

$$t_n = (c - kj)\, u^n$$

gibt zunächst

$$t_n = cu^n - kju^n.$$

Nun folgt aber aus der Gleichung

$$c = \frac{kju^n}{u^n - 1},$$

daß $c u^n - k j u^n = c$ ist, mithin ist

$$t_n = c.$$

Bildet man die Summe sämtlicher Tilgungsquoten $t_1, t_2, \ldots\ldots t_n$, so erhält man

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = (c - kj)\,u + (c - kj)\,u^2 + \cdots\cdots + (c - kj)\,u^n$$

oder

$$t_1 + t_2 \cdots\cdots + t_n = (c - kj)\,\frac{u^n - 1}{j}.$$

Substituiert man hierin für c den Wert $\frac{kju^n}{u^n - 1}$, so ist

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = kj\,\frac{1}{u^n - 1} \cdot \frac{u^n - 1}{j}$$

oder

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = k.$$

Wie man sieht, gibt die Summe der Tilgungsquoten auch hier ebenso wie bei der dekursiven Verzinsung die aufgenommene Schuld k. Drückt man in dieser Gleichung die Glieder $t_2, t_3, \ldots\ldots t_n$ durch das Anfangsglied t_1 und den Quotienten u aus, so erhält man

$$t_1 + t_1 u + \cdots\cdots + t_1 u^{n-1} = k$$

oder

$$t_1 (1 + u + \cdots\cdots + u^{n-1}) = k.$$

Dafür kann nun

$$t_1 (1 + \bar{s}_{\overline{n-1}|}) = k$$

oder

$$t_1 \frac{u^n - 1}{u - 1} = k$$

gesetzt werden, woraus sich die erste Tilgungsquote

$$t_1 = \frac{k}{1 + \bar{s}_{\overline{n-1}|}} \quad \text{oder} \quad t_1 = \frac{k(u-1)}{u^n - 1}$$

ergibt.

Die übrigen Tilgungsquoten $t_2, t_3, \ldots\ldots t_n$ findet man durch Multiplikation einer jeden vorhergehenden Tilgungsquote mit dem Quotienten u. Es gestaltet sich jedoch die Bestimmung der einzelnen Tilgungsquoten leichter, wenn man von der letzten Tilgungsquote $t_n = c$ ausgeht und sukzessive $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots\ldots t_2, t_1$ durch Multiplikation einer jeden der Reihe nach folgenden Tilgungsquote mit $w = 1 - j$ berechnet.

Die Schuld S_m unmittelbar nach der $m$ten Annuitätenzahlung kann auch als die Differenz aus der aufgenommenen Schuld k und

der Summe der m ersten Tilgungsquoten dargestellt werden und man erhält mithin

$$S_m = k - (t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_m)$$

oder

$$S_m = k - t_1 (1 + u + \cdots\cdots + u^{m-1}).$$

Setzt man darin für $1 + u + \cdots\cdots + u^{m-1}$ den Wert $1 + \bar{s}_{\overline{m-1}|}$ oder den Wert $\frac{u^m - 1}{u - 1}$ ein, so bekommt man

$$S_m = k - t_1 (1 + \bar{s}_{\overline{m-1}|})$$

oder auch

$$S_m = k - t_1 \frac{u^m - 1}{u - 1}.$$

Die Aufstellung des Tilgungsplanes begegnet nun, nachdem man sämtliche Tilgungsquoten bereits bestimmt hat, keinen weiteren Schwierigkeiten. Man kann mit dem ersten oder mit dem letzten Jahre beginnen. Wenn man mit dem letzten, d. i. mit dem $n$ten Jahre beginnt, so geht man dann analog wie bei der dekursiven Verzinsung vor, indem man die π-prozentigen Zinsen des Schuldrestes vom letzten, d. i. vom $n$ten Jahre, welcher nebenbei bemerkt gleich c ist, berechnet und dieselben von der Annuität subtrahiert; dadurch erhält man die Tilgungsquote des vorletzten, d. i. des $(n-1)$ten Jahres. Diese Quote zum letzten Schuldreste addiert gibt die Schuld des vorletzten Jahres. Subtrahiert man deren Zinsen von der Annuität, so erhält man die Tilgungsquote des drittletzten, d. i. des $(n-2)$ten Jahres usf.

Es lautet mithin der in allgemeiner Form durchgeführte Tilgungsplan wie folgt:

$$\text{Annuität} \quad c = k \cdot \frac{w}{\bar{a}_{\overline{n}|}}.$$

Jahr (1)	Schuld am Anfange des Jahres (2)	π-prozentige antizipative Zinsen (3)	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres (4)
1	k	$(k - t_1)\,j$	$t_1 = \frac{k}{1 - s_{\overline{n-1}|}} = t_2 w$
2	$k - t_1$	$(k - t_1 - t_2)\,j$	$t_2 = t_1 u = t_3 w$
3	$k - t_1 - t_2$	$(k - t_1 - t_2 - t_3)\,j$	$t_3 = t_2 u = t_4 w$
⋮			
$n-1$	$k - t_1 - \cdots - t_{n-2}$	$(k - t_1 - \cdots - t_{n-1})\,j = cj$	$t_{n-1} = t_{n-2} u = t_n w$
n	$k - t_1 - \cdots - t_{n-1} = t_n = c$	—	$t_n = t_{n-1} u$
			$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = k$

Beispiel.

Ein Hypothekardarlehen von K 1,000.000·— soll bei 4prozentiger, antizipativer Verzinsung in 5 Jahren getilgt werden. Wie groß ist die Annuität und wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Die Annuität berechnet man nach der Gleichung

$$c = k \frac{w}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$$

und erhält dafür nach Tabelle V den Wert

$$c = K\ 216.652 \cdot 68.$$

Um die separate Berechnung der einzelnen Tilgungsquoten zu ersparen, beginnen wir beim Aufstellen des Tilgungsplanes statt mit dem ersten mit dem letzten, d. i. mit dem 5. Jahre.

Annuität $c = K$ 216.652·68.

Jahr (1)	Schuld am Anfange des Jahres (2)	4prozentige antizipative Zinsen (3)	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres (4)
5	K 216.652·68	—	K 216.652·68
4	K 424.639·25	K 8.666·11	K 207.986·57
3	K 624.306·36	K 16.985·57	K 199.667·11
2	K 815.986·79	K 24.972·25	K 191.680·43
1	K 1,000.000·—	K 32.639·47	K 184.013·21
			K 1,000.000·00

Würde man jedoch beim Aufstellen des Tilgungsplanes statt mit dem 5. mit dem 1. Jahre beginnen wollen, so müßte man vorerst die Tilgungsquoten berechnen.

Es ist der Wert der ersten Tilgungsquote nach der Gleichung

$$t_1 = \frac{k}{1 + \bar{s}_{\overline{n-1}|}}$$

oder auch nach der Gleichung

$$t_1 = (c - kj)\, u$$

gleich dem Betrage von K 184.013·21.

Den Wert für t_2 findet man, indem man t_1 mit $\frac{1}{1-j}$, d. i. mit $\frac{100}{96}$ multipliziert und erhält auf diese Weise $t_2 = K$ 191.680·43.

Ebenso findet man $t_3 = K$ 199.667·11, $t_4 = K$ 207.986·57 und $t_5 = K$ 216.652·68. Der Tilgungsplan selbst ist genau dem vorhergehenden gleich, nur ist die Zeit- und Reihenfolge eine umgekehrte.

§ 22. *Tilgung eines ausgeliehenen Kapitals durch eine gegebene Annuität.*

Eine Schuld k, die mit π Prozent antizipativ verzinst wird, soll durch eine im vorhinein bestimmte Annuität c getilgt werden. Die Annuität c kann auch hier wie bei der dekursiven Verzinsung in Prozenten des Kapitals ausgedrückt werden. Es ist z. B. $c = kj'$, wo $j' = \frac{\pi'}{100}$ und größer als $j = \frac{\pi}{100}$ ist.

Es entsteht vor allem die Frage, in wie viel Jahren das Kapital amortisiert wird, also wie groß die Amortisationsdauer n ist?

Man findet zunächst aus der Gleichung

$$c = \frac{kj}{1 - w^n}$$

oder aus der Gleichung $\qquad c = k \frac{w}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$

durch Einsetzung des Wertes für c

$$kj' = \frac{kj}{1 - w^n} \quad \text{oder} \quad kj' = k \frac{w}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$$

und dann, nach gehöriger Reduktion für n den Wert

$$n = \frac{\log \pi' - \log(\pi' - \pi)}{\log u}$$

oder, wenn man mit Tabellen rechnet, für die Summe der Abzinsungsfaktoren den Wert

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{100 - \pi}{\pi'}.$$

Die Zahl n wird im allgemeinen keine ganze Zahl sein; angenommen, sie ist größer als m und kleiner als $(m+1)$, wobei m eine positive ganze Zahl bedeutet. Da die Amortisationsdauer eine ganze Zahl sein muß, so gelangt die Schuld erst nach $(m+1)$ Jahren zur Tilgung und der Betrag, der am Schlusse des $(m+1)$ten Jahres gezahlt wird, dient nur zur Tilgung der am Anfange des $(m+1)$ten Jahres noch vorhandenen Schuld. Dieselbe ist bekanntlich

$$S_m = k u^m - kj' \frac{u^m - 1}{j}$$

oder $\qquad S_m = k u^m - \frac{k \pi'}{\pi}(u^m - 1)$

oder endlich $\qquad S_m = \frac{k}{\pi}[\pi' - (\pi' - \pi) u^m].$

Beispiel.

Ein Anlehen von K 100.000·— soll bei 4prozentiger, antizipativer Verzinsung derart amortisiert werden, daß jährlich am Schlusse eines jeden Jahres 18 Prozent des Anlehens, d. i. K 18.000·— zurückgezahlt werden. In wievielen Jahren wird das Anlehen getilgt, wie groß ist der Schuldrest am Anfange des letzten Jahres und wie lautet der Tilgungsplan?

Die Anzahl der Jahre bestimmt man nach der Gleichung

$$n = \frac{\log \pi' - \log(\pi' - \pi)}{\log u}$$

und erhält

$$n = \frac{\log 18 - \log 14}{\log 100 - \log 96}$$

oder

$$n = 6{\cdot}16 \text{ Jahre.}$$

Würde man n mit Hilfe der Tabelle IV bestimmen, so findet man zunächst die Summe der Abzinsungsfaktoren

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{100 - 4}{18}$$

oder

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = 5{\cdot}3333\,3333$$

und dann den Wert für x aus der folgenden Tabelle

n	$\bar{a}_{\overline{n\|}}$	n	$\bar{a}_{\overline{n\|}}$
7	5·9652 6053	$6 + x$	5·3333 3333
6	5·2138 1305	6	5·2138 1305
D	0·7514 4748	d	0·1195 2028

und der Proportion $D : 1 = d : x$.

Es ergibt sich der Wert für $x = 0{\cdot}16$ und mithin für $n = 6{\cdot}16$ Jahre.

Die Schuld kann also erst nach 7 Jahren amortisiert werden. Der Schuldrest hat am Anfange des 7. Jahres nach der Gleichung

$$S_m = \frac{k}{\pi}\left[\pi' - (\pi' - \pi)\, u^m\right]$$

den Wert

$$S_6 = \frac{100000}{4}\left[18 - (18 - 4)\, 1{\cdot}2775\,3440\right]$$

oder ausgerechnet K 2.862·96.

Der Schuldner zahlt mithin, wie man auch aus dem folgenden Tilgungsplane entnehmen kann, durch 6 Jahre alljährlich K 18.000·— und am Schlusse des 7. Jahres nur K 2.862·96, womit dann die ganze Schuld getilgt erscheint.

Annuität $c = K$ 18.000·—.

Jahr (1)	Schuld am Anfange des Jahres (2)	4prozentige antizipative Zinsen (3)	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres (4)
7	K 2.862·96	—	K 2.862·96
6	K 20.748·44	K 114·52	K 17.885·48
5	K 37.918·50	K 829·94	K 17.170·06
4	K 54.401·76	K 1.516·74	K 16.483·26
3	K 70.225·69	K 2.176·07	K 15.823·93
2	K 85.416·66	K 2.809·03	K 15.190·97
1	K 100.000·—	K 3.416·66	K 14.583·34
			K 100.000·00

§ 23. *Tilgung eines Anlehens bei Ausgabe von Obligationen.*

Ein Anlehen k soll bei π-prozentiger, antizipativer Verzinsung in n Jahren durch eine am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuität getilgt werden. Das Anlehen ist in m Obligationen, jede mit dem Nennwerte C geteilt, wobei jede ausgeloste Obligation mit dem Betrage C' eingelöst wird. Es soll die Annuität berechnet und der Tilgungsplan aufgestellt werden.

Das vom Schuldner zurückzuzahlende Kapital $\frac{C'k}{C}$ verzinst sich ähnlich wie bei dekursiver Verzinsung auch in diesem Falle nicht zu π, sondern mit $\frac{\pi C}{C'}$ Prozent. Der Aufzinsungsfaktor, den wir hier ebenfalls mit q bezeichnen, ist mithin

$$q = \frac{1}{1 - \frac{C\pi}{C'\,100}} \quad \text{oder} \quad q = \frac{1}{1 - \frac{Cj}{C'}}.$$

Der Wert der am Ende jedes Jahres fälligen Annuität c ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{C'k}{C}\, q^{n-1} = c\, q^{n-1} + c\, q^{n-2} + \cdots\cdots + c$$

oder

$$\frac{C'k}{C}\, q^{n-1} = c\,\frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$c = \frac{C'k\, q^{n-1}}{C} \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}.$$

Substituiert man darin für $q - 1$ den Wert $\frac{Cj}{C'}q$, den man aus

der Gleichung $q = \frac{1}{1 - \frac{Cj}{C'}}$ erhält, so bekommt man

$$c = \frac{kjq^n}{q^n - 1}.$$

Um die Schuld S_m nach der $m$ten Annuitätenzahlung, d. i. am Anfange des $(m+1)$ten Jahres zu finden, subtrahiert man von dem entsprechenden Zeitwerte der Schuld $\frac{C'k}{C}$ die Summe der Endwerte der bereits gezahlten Annuitäten und erhält

$$S_m = \frac{C'k}{C} q^m - cq \frac{q^m - 1}{q - 1}.$$

Ebenso findet man die Schuld S_{m-1} nach der $(m-1)$ten Annuitätenzahlung

$$S_{m-1} = \frac{C'k}{C} q^{m-1} - cq \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1}.$$

Subtrahiert man diese beiden Schuldreste, so erhält man den Betrag $x_m C'$, der zur Einlösung der am Schlusse des $m$ten Jahres ausgelosten x_m Obligationen dient.

Es ist also

$$x_m C' = \frac{C'k}{C} q^{m-1} - cq \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1} - \frac{C'k}{C} q^m + cq \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

oder

$$x_m C' = \frac{cq}{q-1}(q^m - q^{m-1}) - \frac{C'k}{C}(q^m - q^{m-1})$$

oder auch

$$x_m C' = \frac{cq^m}{q-1}(q-1) - \frac{C'kq^m}{C}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

und, da $1 - \frac{1}{q} = \frac{Cj}{C'}$ ist,

$$x_m C' = (c - kj) q^m.$$

Für $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$, erhält man:

$$\begin{aligned}
x_1 C' &= (c - kj) q, & & \\
x_2 C' &= (c - kj) q^2 & \text{oder } x_2 &= x_1 q, \\
x_3 C' &= (c - kj) q^3 & \text{„} \quad x_3 &= x_2 q = x_1 q^2, \\
&\vdots & & \\
x_n C' &= (c - kj) q^n & \text{„} \quad x_n &= x_{n-1} q = x_1 q^{n-1}.
\end{aligned}$$

Auch hier bilden die Werte der am Schlusse eines jeden Jahres

zur Einlösung gelangenden Anzahl der Obligationen Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{1}{1 - \frac{Cj}{C'}}$.

Nun ist aber $x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = m$ und man erhält, wenn man darin die Glieder $x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ durch das Anfangsglied x_1 und den Quotienten q ausdrückt, zunächst

$$x_1 + x_1 q + x_1 q^2 + \cdots\cdots + x_1 q^{n-1} = m$$

und hieraus den Wert der am Schlusse des 1. Jahres zur Auslosung gelangenden Anzahl der Obligationen

$$x_1 = \frac{m(q-1)}{q^n - 1}$$

oder, da $q - 1 = \frac{Cj}{C'} q$ ist,

$$x_1 = \frac{mCjq}{C'(q^n - 1)}$$

oder endlich, wenn man darin für mC den Wert k einsetzt,

$$x_1 = \frac{kjq}{C'(q^n - 1)}.$$

Hier müssen die Werte $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, die im allgemeinen keine ganzen Zahlen sind, zu ganzen Zahlen abgerundet werden.

Der letzte Schuldrest $x_n C'$ muß, wie die folgende Rechnung zeigt, gleich der Annuität c sein.

Es ist

$$x_n C' = (c - kj) q^n$$

oder

$$x_n C' = cq^n - kjq^n.$$

Aus der Gleichung

$$c = \frac{kjq^n}{q^n - 1}$$

folgt aber, daß $cq^n - kjq^n = c$ ist; daher muß

$$x_n C' = c$$

sein.

Genau wie bei der dekursiven Verzinsung findet man auch hier die der $m$ten Annuitätenzahlung entsprechende Tilgungsquote t_m, indem man $x_m = \frac{(c - kj) q^m}{C'}$ mit dem Nennwerte C multipliziert.

Es ist mithin

$$t_m = x_m C = \frac{C(c - kj) q^m}{C'}.$$

Für $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$, erhält man:

$$t_1 = x_1\, C = \frac{C\,(c - k\,j)}{C'}\, q,$$

$$t_2 = x_2\, C = \frac{C\,(c - k\,j)}{C'}\, q^2 \quad \text{oder} \quad t_2 = t_1\, q,$$

$$t_3 = x_3\, C = \frac{C\,(c - k\,j)}{C'}\, q^3 \quad " \quad t_3 = t_2\, q = t_1\, q^2,$$

$$\vdots$$

$$t_n = x_n\, C = \frac{C\,(c - k\,j)}{C'}\, q^n \quad " \quad t_n = t_{n-1}\, q = t_1\, q^{n-1}.$$

Die Summe der Tilgungsquoten, die eine steigende geometrische Reihe mit dem Quotienten q bilden, gibt

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = \frac{C\,(c - k\,j)}{C'}\, q + \frac{C\,(c - k\,j)}{C'}\, q^2 + \cdots\cdots + \frac{C\,(c - k\,j)\, q^n}{C'}$$

oder

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = \frac{C\,(c - k\,j)\, q}{C'}\, \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

oder auch, wenn man darin für $q - 1$ den Wert $\frac{C\,j}{C'}\, q$ einsetzt,

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = (c - k\,j)\, \frac{q^n - 1}{j}.$$

Substituiert man ferner darin für die Annuität c den Wert $\frac{k\,j\,q^n}{q_n - 1}$, so erhält man

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = \frac{k\,j}{q^n - 1} \cdot \frac{q^n - 1}{j}$$

oder

$$t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_n = k.$$

Die Summe der Tilgungsquoten gibt die aufgenommene Schuld k, welche in n Jahren durch Annuitätenzahlungen getilgt wird.

Drückt man in dieser Gleichung die Glieder $t_2, t_3, \ldots\ldots, t_n$ durch das Anfangsglied t_1 und den Quotienten q aus, so erhält man

$$t_1 + t_1\, q + \cdots\cdots + t_1\, q^{n-1} = k.$$

Hieraus folgt

$$t_1 = \frac{k\,(q - 1)}{q^n - 1}$$

oder auch, da, wie bereits bekannt, $q - 1 = \frac{C\,j}{C'}\, q$ ist,

$$t_1 = \frac{C\,k\,j\,q}{C'\,(q^n - 1)}.$$

Der Tilgungsplan selbst kann nunmehr ohne Schwierigkeit ganz allgemein, wie folgt, aufgestellt werden (siehe Tabelle auf S. 70):

Beispiel.

Ein Anlehen von K 1,000.000·— soll in 5 Jahren bei 4prozentiger, antizipativer Verzinsung durch eine konstante am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuitätenzahlung getilgt werden. Die Schuld ist in 10.000 Obligationen à K 100·— abgeteilt. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan, wenn jede ausgeloste Obligation mit K 106·— eingelöst wird?

Um die Annuität und die Anzahl der am Schlusse jedes Jahres zur Auslosung gelangenden Obligationen bestimmen zu können, müssen wir vor allem die Aufzinsungsfaktoren q und q^5 berechnen.

Es ist $q = \dfrac{1}{1 - \dfrac{4}{106}} = \dfrac{106}{102}$ und $q^5 = 1{\cdot}2120\,7214$.

Mit Benützung der Gleichung $c = \frac{k\,j\,q^n}{q^n - 1}$ findet man für die Annuität den Wert

$$c = \frac{1000000 \times 0{\cdot}04 \times 1{\cdot}2120\,7214}{0{\cdot}2120\,7214}$$

oder, ausgerechnet $c = K$ 228.615·06.

Der Wert der am Schlusse des ersten Jahres ausgelosten Anzahl der Obligationen ergibt sich aus Gleichung

$$x_1 = \frac{k\,j\,q}{C'\,(q^n - 1)}$$

und erhält für $x_1 = 1.849{\cdot}17$ oder abgerundet 1.849. Die übrigen Werte der am Schlusse jedes Jahres zur Auslosung gelangenden Anzahl der Obligationen findet man durch sukzessive Multiplikation von x mit dem Quotienten $q = \frac{106}{102}$ und erhält auf diese Weise:

$x_2 = 1.921{\cdot}68$ oder abgerundet $x_2 = 1.922$,
$x_3 = 1.997{\cdot}04$ " " $x_3 = 1.997$,
$x_4 = 1.075{\cdot}36$ " " $x_4 = 2.075$
und $x_5 = 2.156{\cdot}75$ " " $x_5 = 2.157$.

Für dieses Anlehen lautet nunmehr, wie folgt, der Tilgungsplan:

Annuität $c = \frac{k j q^n}{q^n - 1}$.

Jahr	Zahl der am Anfange des Jahres vorhandenen Obligationen	Zahl der am Ende des Jahres ausgelosten Obligationen.	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres	π-prozentige antizipative Zinsen	Rückzahlungsbetrag für die ausgelosten Obligationen	Gesamterfordernis: Summe aus (5) und (6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	m	$x_1 = \frac{m(q-1)}{q^n - 1}$	$x_1 C$	$(k - x_1 C) j$	$x_1 C'$	$(k - x_1 C) j + x_1 C'$
2	$m - x_1$	$x_2 = x_1 q$	$x_2 C$	$(k - x_1 C - x_2 C) j$	$x_2 C'$	$(k - x_1 C - x_2 C) j + x_2 C'$
3	$m - x_1 - x_2$	$x_3 = x_2 q$	$x_3 C$	$(k - x_1 C - x_2 C - x_3 C) j$	$x_3 C'$	$(k - x_1 C - x_2 C - x_3 C) j + x_3 C'$
$n-1$	$m - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-2}$	$x_{n-1} = x_{n-2} q$	$x_{n-1} C$	$(k - x_1 C - \cdots - x_{n-1} C) j$	$x_{n-1} C'$	$(k - x_1 C - \cdots - x_{n-1} C) j + x_{n-1} C'$
n	$m - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}$	$x_n = x_{n-1} q$	$x_n C$	—	$x_n C'$	$x_n C'$
		$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$	$x_1 C + \cdots + x_n C = k$			

Annuität $c = K$ 228.615·06.

Jahr	Zahl der vorhandenen Obligationen am Anfange des Jahres	Zahl der am Schlusse des Jahres ausgelosten Obligationen	Tilgungsquote bezogen auf den Schluß des Jahres	4-prozentige antizipative Zinsen	Rückzahlungsbetrag für die ausgelosten Obligationen	Gesamterfordernis: Summe aus (5) und (6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	10.000	1.849	K 184.900·—	K 32.604·—	K 195 994·—	K 228.598·—
2	8.151	1.922	K 192.200·—	K 24.916·—	K 203.732·—	K 228 648·—
3	6.229	1.997	K 199.700·—	K 16.928·—	K 211.682·—	K 228.610·—
4	4.232	2.075	K 207.500·—	K 8.628·—	K 2 9.950·—	K 228·578·—
5	2.157	2.157	K 215.700·—	—	K 228.642·—	K 228.742·—
		10.000	K 1,000.000·—		K 1,060.000·—	

Werden die Obligationen zu ihrem Nennwerte eingelöst, so geht dann, da $C' = C$ ist, der Aufzinsungsfaktor q in u über und wir erhalten dadurch für die Annuität c und für jede einzelne Anzahl der zur Einlösung gelangenden Obligationen x_1, x_2, x_3, ... x_n einfachere Beziehungen; so ergibt sich der Wert für die Annuität

$$c = k \frac{w}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$$

oder

$$c = \frac{k j}{1 - w^n} = \frac{k j u^n}{u^n - 1}$$

und der Wert für die Anzahl der im ersten Jahre zur Auslosung gelangenden Obligationen

$$x_1 = \frac{m(u-1)}{u^n - 1}$$

oder

$$x_1 = \frac{m}{1 + \bar{s}_{n-1}}.$$

Die übrigen Werte für x erhält man durch die sukzessive Multiplikation eines jeden vorhergehenden x mit dem Aufzinsungsfaktor u.

Es ist mithin:

$$x_2 = x_1 u,$$
$$x_3 = x_2 u,$$
$$x_n = x_{n-1} u.$$

Beispiel.

Stellen wir beim früheren Beispiele unter sonst gleichen Umständen die Bedingung auf, daß jede von den ausgelosten Obligationen statt mit

K 106·— mit ihrem Nennwerte, d. i. mit K 100·— eingelöst wird, so erhält man für die Annuität unter Benützung der Gleichung

$$c = k \frac{w}{a_{\overline{n}|}}$$

den Wert von K 216.652·68 und für die ausgelosten Obligationen die Zahlenwerte

$x_1 = 1.840·13$ oder abgerundet $x_1 = 1.840$,
$x_2 = 1.916·80$ „ „ $x_2 = 1.917$,
$x_3 = 1.996·67$ „ „ $x_3 = 1.997$,
$x_4 = 2.079·87$ „ „ $x_4 = 2.080$,
und $x_5 = 2.166·53$ „ „ $x_5 = 2.166$.

Für dieses modifizierte Anlehen lautet mithin der Tilgungsplan:

Annuität $c = K$ 216.652·68.

Jahr (1)	Anzahl der vorhandenen Obligationen am Anfange des Jahres (2)	Zahl der am Schlnsse des Jahres ausgelosten Obligationen (3)	Tilgungsqnote bezogen anf den Schluß des Jahres (4)	4prozentige antizipative Zinsen (5)	Rückzahlnngsbetrag für die ansgelosten Obligationen (6)	Gesamterfordernis: Snmme ans (5) und (6) (7)
1	10.000	1.840	K 184.000·—	K 32.640·—	K 184.000·—	K 216.640·—
2	8.160	1.917	K 191.700·—	K 24.972·—	K 191.700·—	K 216.672·—
3	6.243	1.997	K 199.700·—	K 16.984·—	K 199.700·—	K 216.684·—
4	4.246	2.080	K 208.000·—	K 8.664·—	K 208.000·—	K 216.664·—
5	2.166	2.166	K 216.600·—	—	K 216.600·—	K 216.600·—
		10.000	K 1,000.000·—		K 1,000.000·—	

5. Tilgungspläne von Lotterieanlehen.

§ 24. *Wesen und Arten von Lotterieanlehen.*

Prämienanlehen — sogenannte *Lotterieanlehen* — sind Schuldverschreibungen, in welchen allen Gläubigern oder einem Teile derselben außer der Zahlung der schuldigen Geldsumme eine *Prämie* derart zugesichert wird, daß die zu prämiierenden Schuldverschreibungen und die Höhe der ihnen zufallenden Prämien durch Auslosung bestimmt werden sollen.

Die einzelnen Schuldscheine, aus denen ein solches Anlehen besteht, heißen *Lose* (sors). Im allgemeinen werden die Lose in 2 Gruppen geteilt, nämlich in *verzinsliche* und *unverzinsliche* Lose, je nachdem dieselben bis zu ihrem Verlosungstage Zinsen tragen oder nicht. Bei dem

unverzinslichen Lotterieanlehen werden sämtliche aus der Anleihe sich ergebenden Zinsen in Prämien verwandelt, während bei dem verzinslichen Lotterieanlehen nur ein Teil der Anleihezinsen zur Dotation der Prämien verwendet wird.

§ 25. *Unverzinsliche Lotterieanlehen.*

Hier wird die zur Tilgung der dekursiv verzinsten Schuld dienende Annuität, die wir mit c bezeichnen, *nur zur Dotierung größerer und kleinerer Gewinste*, sogenannter *Treffer* verwendet.

Angenommen ein Anlehen k, welches aus m Losen besteht, soll in n Terminen (Ziehungen) derart getilgt werden, daß bei jeder Ziehung t größere Treffer mit den eine arithmetische Reihe mit der Differenz d bildenden Beträgen G_1, G_2, ... G_n gezogen werden. Die Zahl der übrigen mit den kleinsten Gewinsten bedachten Lose soll in den n aufeinander folgenden Ziehungen x_1, x_2, ... x_n mit den auf die einzelnen Lose entfallenden Beträgen g_1, g_2, ... g_n sein.

Bei der ersten Ziehung ist für größere Treffer der Betrag G_1 und für die x_1 kleinsten Treffer der Betrag $x_1 g_1$ auszuzahlen; das Erfordernis der ersten Ziehung ist mithin $G_1 + x_1 g_1$, welches durch die Annuität c, die man nach der Gleichung $c = k \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ berechnet, gedeckt werden muß.

Es ist also

$$c = G_1 + x_1 g_1.$$

Ebenso ist bei der zweiten Ziehung

$$c = G_2 + x_2 g_2$$

oder, da $G_2 = G_1 + d$ ist,

$$c = G_1 + d + x_2 g_2,$$

bei der dritten Ziehung

$$c = G_1 + 2d + x_3 g_3 \quad \text{usf.}$$

und bei der $n$ten Ziehung

$$c = G_1 + (n-1) d + x_n g_n.$$

Zu diesen n Gleichungen kommt noch die Gleichung hinzu, welche eine Beziehung zwischen der Anzahl der größeren und der kleinsten Treffer enthält.

Sie lautet: $m = nt + x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n$.

Aus diesen $(n+1)$ Gleichungen können, wenn die Annuität c, die Differenz der Reihe d und die kleinsten Gewinstbeträge g_1, g_2, ... g_n gegeben sind, die übrigen $(n+1)$ Größen, nämlich x_1, x_2, ... x_n und G_1, wie folgt, berechnet werden.

Zunächst erhält man durch Gleichsetzung des ersten Annuitätenwertes mit allen übrigen

$$G_1 + x_1 g_1 = G_1 + d + x_2 g_2,$$
$$G_1 + x_1 g_1 = G_1 + 2d + x_3 g_3,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$G_1 + x_1 g_1 = G_1 + (n-1)d + x_n g_n$$

und daraus

$$x_2 = \frac{x_1 g_1}{g_2} - \frac{d}{g_2},$$
$$x_3 = \frac{x_1 g_1}{g_3} - \frac{2d}{g_3},$$
$$\vdots$$
$$x_n = \frac{x_1 g_1}{g_n} + \frac{(n-1)d}{g_n}.$$

Substituiert man diese für $x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ gefundenen Werte in die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = m - nt,$$

so erhält man

$$x_1 + x_1 g_1\left(\frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{g_n}\right) - d\left(\frac{1}{g_2} + \frac{2}{g_3} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{g_n}\right) = m - nt$$

oder

$$x_1 g_1\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{g_n}\right) - d\left(\frac{1}{g_2} + \frac{2}{g_3} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{g_n}\right) = m - nt.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{g_2} + \frac{2}{g_3} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{g_n} = \left(\frac{1}{g_1} + \frac{2}{g_2} + \cdots\cdots + \frac{n}{g_n}\right) - \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{g_n}\right)$$

oder, wenn man

$$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{g_n} = \alpha$$

und

$$\frac{1}{g_1} + \frac{2}{g_2} + \cdots\cdots + \frac{n}{g_n} = \beta \text{ setzt,}$$

$$\frac{1}{g_2} + \frac{2}{g_3} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{g_n} = \beta - \alpha.$$

Mithin ist

$$x_1 g_1 \alpha - d(\beta - \alpha) = m - nt$$

und daraus

$$x_1 = \frac{m - nt + d(\beta - \alpha)}{g_1 \alpha}.$$

Nach Substitution dieses Wertes für x_1 in das erwähnte Gleichungssystem erhält man die Werte für die übrigen x und für G_1.

Bei der Konstruktion von Verlosungsplänen der Lotterieanlehen bietet die Berechnung der Summen α und β die größte Schwierigkeit. In zwei Fällen wird jedoch diese Aufgabe wesentlich erleichtert und zwar, wenn die kleinsten Treffer einander gleich sind oder wenn sie nach einem bestimmten Gesetze, z. B. nach einer arithmetischen Progression zunehmen.

Ist beispielsweise

$$g_1 = g_2 = \cdots\cdots = g_n = g,$$

so ist

$$\alpha = \frac{n}{g} \quad\text{und}\quad \beta = \frac{n}{2g}(n+1).$$

Nach Substitution dieser Werte für α und β in die Gleichung

$$x_1 = \frac{m - nt + d(\beta - \alpha)}{g_1 \alpha}$$

und gehöriger Reduktion erhält man

$$x_1 = \frac{m}{n} - t + \frac{d}{2g}(n-1).$$

Nehmen die kleinsten Gewinste nach einer arithmetischen Progression mit der Differenz δ zu, so ist

$$\alpha = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_1 + \delta} + \frac{1}{g_1 + 2\delta} + \cdots\cdots + \frac{1}{g_1 + (n-1)\delta}$$

oder

$$\alpha = \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{\frac{g_1}{\delta}} + \frac{1}{\frac{g_1}{\delta} + 1} + \frac{1}{\frac{g_1}{\delta} + 2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\frac{g_1}{\delta} + (n-1)}\right].$$

Angenommen $\frac{g_1}{\delta}$ sei eine ganze Zahl, z. B. gleich z, so ist

$$\alpha = \frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{z+(n-1)}\right]$$

und

$$\beta = \frac{1}{\delta}\left\{\frac{1}{z} + \frac{2}{z+1} + \frac{3}{z+2} + \cdots\cdots + \frac{n}{z+(n-1)}\right\}.$$

Nun kann man aber den Ausdruck innerhalb der geschweiften Klammer $\frac{1}{z} + \frac{2}{z+1} + \frac{3}{z+2} + \cdots\cdots + \frac{n}{z+(n-1)}$, da

$$\frac{r+1}{z+r} = \frac{r+1+(z-1)-(z-1)}{z+r} = \frac{z+r}{z+r} - \frac{z-1}{z+r} = 1 - \frac{z-1}{z+r}$$

ist, auf die Form bringen

$$\frac{1}{z}+\left(1-\frac{z-1}{z+1}\right)+\left(1-\frac{z-1}{z+2}\right)+\cdots\cdots+\left(1-\frac{z-1}{z+(n-1)}\right)$$

oder

$$n-1+\frac{1}{z}-(z-1)\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{z+(n-1)}\right]$$

und man erhält mithin den Wert für

$$\beta=\frac{1}{\delta}\left\{n-1+\frac{1}{z}-(z-1)\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{z+(n-1)}\right]\right\}.$$

Bezeichnen wir die in den eckigen Klammern stehenden Summen, deren Werte man aus der Tabelle VI entnehmen kann, durch

$$\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{1}{z+r} \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{1}{z+r},$$

so bekommt man für

$$\alpha=\frac{1}{\delta}\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{1}{z+r}$$

und für

$$\beta=\frac{1}{\delta}\left[n-1+\frac{1}{z}-(z-1)\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{1}{z+r}\right].$$

Die Berechnung von x_1, den folgenden x und G_1 bildet nunmehr keine besondere Schwierigkeit.

Beispiel.

Ein Lotterieanlehen von K 1,000.000·—, bestehend aus 10.000 Losen à K 100·— soll bei 4prozentiger, dekursiver Verzinsung in 5 Jahren getilgt werden. Bei jeder alljährlich stattfindenden Ziehung sollen 20 größere Treffer ausgelost, und die übrigen Lose in der ersten Ziehung zu je K 102·—, in der zweiten Ziehung zu je K 104·—, dann zu je K 106, K 108 und zuletzt zu je K 110 eingelöst werden. Ferner soll für die 20 größeren Treffer ein konstanter Gewinstbetrag verwendet werden. Wie lautet der diesbezügliche Verlosungsplan?

In unserem Falle ist $k=K$ 1,000.000·—, $m=10.000$, $t=20$, $n=5$, und $d=0$, während $g_1=K$ 102·—, $g_2=K$ 104·—, $g_3=K$ 106·—, $g_4=K$ 108·— und $g_5=K$ 110·— beträgt.

Nun ist, da $d=0$ ist,

$$x_1=\frac{m-nt}{g_1\,\alpha},$$

wobei $\alpha=\frac{1}{\delta}\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{1}{z+r}$ bedeutet.

Um für α den entsprechenden Wert zu berechnen, gehen wir von der Gleichung aus

$$\alpha=\frac{1}{102}+\frac{1}{104}+\cdots\cdots+\frac{1}{110}$$

und erhalten

$$\alpha=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots\cdots+\frac{1}{55}\right].$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots\cdots+\frac{1}{55}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{50}+\frac{1}{51}+\cdots\cdots+\frac{1}{55}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{50}\right)$$

oder mit Benützung der Tabelle VI

$$\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots\cdots+\frac{1}{55}=3{\cdot}5936\,1221-3{\cdot}4992\,0534=0{\cdot}0944\,0687$$

und man erhält mithin

$$\alpha=\frac{1}{2}\times 0{\cdot}0944\,0687=0{\cdot}0472\,0344.$$

Substituiert man die entsprechenden Werte in die obige Gleichung für x_1, so bekommt man

$$x_1=\frac{10000-5\times 20}{102\times 0{\cdot}0472\,0344}$$

oder

$$x_1=2.056{\cdot}18 \quad \text{und abgerundet} \quad x_1=2.056.$$

Den Wert für x_2 erhält man, indem man die Gleichung

$$x_2=\frac{x_1\,g_1}{g_2}$$

benützt. Es ist

$$x_2=2.016{\cdot}64 \quad \text{oder abgerundet} \quad x_2=2.017.$$

Ebenso erhält man:

$x_3=1.978{\cdot}59$ oder abgerundet $x_3=1.978$,
$x_4=1.941{\cdot}95$ „ „ $x_4=1.942$
und $x_5=1.906{\cdot}64$ „ „ $x_5=1.907$.

Um nun jenen Betrag G_1 zu finden, der zur Dotierung der größeren Treffer verwendet wird, geht man von der Gleichung

$$c=G_1+x_1\,g_1$$

aus, und erhält, nachdem man zuerst die Annuität c nach der Gleichung $c=k\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$ berechnet hat,

$$224627{\cdot}11=G_1+209730{\cdot}36,$$

woraus sich $G_1=K$ 14.896·75 oder abgerundet $G_1=K$ 14.900·— ergibt.

Es kann mithin für die 20 größeren Treffer der Betrag von K 14.900 verwendet werden, welcher folgendermaßen verteilt werden kann:

1 Treffer		mit	K 8.000·—,
1 „		„	K 2.000·—,
3 „	à K 400·—	„	K 1.200·—,
5 „	à K 320·—	„	K 1.600·—,
10 „	à K 210·—	„	K 2.100·—.

Der Verlosungsplan für dieses Prämienanlehen lautet mithin:

Jahr (1)	Anzahl der am Schlusse des Jahres gezogenen kleinsten Treffer (2)	Erfordernis für die kleinsten Treffer (3)	Erfordernis für die 20 größeren Treffer (4)	Gesamterfordernis: Summe aus (3) und (4) (5)
1	2.056	K 209.712·—	K 14.900 —	K 224.612·—
2	2.017	K 209.768·—	K 14.900·—	K 224.668·—
3	1.978	K 209.668·—	K 14.900 —	K 224.568·—
4	1.942	K 209.736·—	K 14.900·—	K 224.636·—
5	1.907	K 209.770·—	K 14.900·—	K 224.670·—
	9.900			

§ 26. *Verzinsliche Lotterieanlehen.*

Bei diesen Anlehen soll die jeweilige Annuität nicht nur zur Dotierung der größeren Gewinste und zur Einlösung von Losen, auf welche keine Treffer entfallen, von sogenannten *Nieten*, sondern auch zur Zahlung der Zinsen von Losen verwendet werden. Daher muß der Prozentsatz, zu dem das Anlehen verzinst wird, ein größerer sein, als jener, zu welchem die Lose verzinst werden.

Ein aus m Losen bestehendes Anlehen k soll in n Ziehungen derart getilgt werden, daß die größeren Gewinste, deren Anzahl in jeder Ziehung t sein soll, mit dem konstanten Betrage G dotiert werden, während die übrigen Lose mit dem Nominalbetrage N eingelöst werden. Das Anlehen soll mit p' und die Lose mit p Prozent verzinst werden. Wie lautet der entsprechende Verlosungsplan?

Hier kann man die Tilgung des Anlehens von der Lotterie ganz trennen.

Die Anzahl der beim ersten Termine gezogenen Lose ist nach Seite 54

$$t + x_1 = \frac{m}{1 + s_{\overline{n-1}|}},$$

woraus sich

$$x_1 = \frac{m}{1 + s_{\overline{n-1}|}} - t \text{ ergibt.}$$

Vermehrt man $(t + x_1)$ Lose um p Prozent, so erhält man die Anzahl jener Lose, welche im zweiten Termine zur Einlösung gelangen.

Es ist mithin

$$t + x_2 = (t + x_1)(1 + i)$$

oder

$$t + x_2 = (t + x_1)\, r$$

und hieraus

$$x_2 = (t + x_1)\, r - t.$$

Ebenso findet man

$$x_3 = (t + x_2)\, r - t \text{ usf.}$$

Die Annuität, welche man nach der Gleichung

$$c = k \cdot \frac{1}{a'_{\overline{n}|}}$$

berechnet, dient offenbar dazu, um das jeweilige Gesamterfordernis für eine jede Ziehung zu decken. So besteht z. B. das Gesamterfordernis für die erste Ziehung aus den p-prozentigen Zinsen der m Lose, mit je Ni pro Los, also im Gesamtbetrage von mNi, ferner aus dem Betrage $x_1 N$ für die x_1 Nieten und aus dem Betrage G für t größere Treffer.

Es ist mithin

$$c = mNi + x_1 N + G,$$

woraus man den Dotationsbetrag für die größeren Treffer

$$G = c - (mi + x_1)\, N$$

erhält.

Die weitere Rechnung und das Aufstellen des Verlosungsplanes bieten keine besonderen Schwierigkeiten

Beispiel.

Ein Anlehen von K 1,000.000·—, das aus 10.000 Losen à K 100 besteht, soll bei 5prozentiger Verzinsung durch eine am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuität in 5 Jahren getilgt werden. Der Betrag, welcher auf die 10 größeren Treffer entfällt, soll durch alle 5 Ziehungen unverändert bleiben. Die übrigen Lose sollen zu ihrem Nennwerte, d. i. zu je K 100 eingelöst werden. Bis zur Ziehung ist jedes Los mit 3 Prozent zu verzinsen. Wie stellt sich für dieses Anlehen der Verlosungsplan?

In diesem Falle ist $m = 10.000$, $n = 5$, $t = 10$ und $N = K\ 100.$—, während $p = 3$ und $p' = 5$ Prozent beträgt.

Die Anzahl der im ersten Jahre zur Einlösung gelangenden Lose ist

$$10 + x_1 = \frac{10000}{5{\cdot}3091\,3581}$$

oder $$10 + x_1 = 1883{\cdot}55,$$
woraus sich die Anzahl der Nieten

$$x_1 = 1.873{\cdot}55 \text{ oder abgerundet } x_1 = 1.874$$

ergibt. Wenn man die Anzahl der zur Einlösung gelangenden Lose sukzessive mit 3 Prozent aufzinst und dann die Anzahl der größeren Treffer davon abzieht, so erhält man die jeweilige Anzahl der Nieten, und zwar:

$x_2 = 1.930{\cdot}06$ oder abgerundet $x_2 = 1.930$,
$x_3 = 1.988{\cdot}26$ „ „ $x_3 = 1.988$,
$x_4 = 2.048{\cdot}21$ „ „ $x_4 = 2.048$
und $x_5 = 2.109{\cdot}96$ „ „ $x_5 = 2.110$.

Den Betrag, der zur Dotierung der größeren Treffer dient, findet man aus der Gleichung

$$G = c - (m\,i + x_1)\,N$$

oder, indem man darin für c den Wert $k\,\frac{1}{a'_{\overline{n|}}}$ einsetzt,

$$G = k\,\frac{1}{a'_{\overline{n|}}} - (m\,i + x_1)\,N.$$

Es ist mithin $G = K\ 13.619{\cdot}80$ oder rund $G = K\ 13.620{\cdot}$—. Diese Summe läßt sich auf die 10 Treffer wie folgt verteilen:

1 Treffer mit K 8.000·—,
1 „ „ K 2.000·—,
3 „ à K 600·— „ K 1.800·—,
5 „ à K 364·— „ K 1.820·—.

Der Verlosungsplan lautet demnach:

Jahr	Anzahl der noch spielenden Lose	Zahl der		Erfordernis für die		3prozentige Zinsen der noch spielenden Lose	Gesamterfordernis: Summe aus (5), (6) und (7)
		größeren Treffer	Nieten	größeren Treffer	Nieten		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	10.000	10	1.874	K 13.620·—	K 187.400 —	K 30.000·—	K 231.020 —
2	8.116	10	1.930	K 13.620·—	K 193.000·—	K 24.348·—	K 230.968.—
3	6.176	10	1.988	K 13.620·—	K 198.800·—	K 18.528·—	K 230.948 —
4	4.178	10	2.048	K 13.620·—	K 204.800 —	K 12.534·—	K 230.954·—
5	2.120	10	2.110	K 13.620·—	K 211.000·—	K 6.360·—	K 230.980·—
		50	9.950		K 995 000·—		

6. Kurse und Konvertierungen von Anlehen.

§ 27. *Kurse von Anlehen, die durch konstante Annuitäten getilgt werden. Kursparität.*

1. Wenn ein beliebiges Anlehen N durch eine am Schlusse eines jeden Jahres fällige, konstante Annuität c bei p-prozentiger, dekursiver Verzinsung in n Jahren getilgt wird, so muß bekanntlich die Summe der Barwerte sämtlicher Annuitäten gleich dem aufgenommenen Anlehen sein.

Es ist also

$$c\,v + c\,v^2 + \cdots\cdots + c\,v^n = N,$$

woraus sich der Wert

$$N = c\,(v + v^2 + \cdots\cdots + v^n)$$

oder

$$N = c\,a_{\overline{n|}} \text{ oder auch } N = c\,\frac{1 - v^n}{i}$$

ergibt.

Es kommt häufig vor, daß der Gläubiger durch verschiedene Umstände veranlaßt wird, die Bedingung zu stellen, daß das Anlehen bei gleicher Annuitätenzahlung statt zu p zu p' Prozent verzinst wird, wodurch ihm das Kapital, wenn $p' > p$ ist, höhere Zinsen trägt. Dieses kann der Gläubiger nur dadurch erreichen, daß er dem Schuldner einen geringeren Betrag bietet, als die Summe N, auf welche der Schuldschein lautet und welche vom Schuldner zurückgezahlt werden muß.

Bezeichnen wir den Betrag, der dem Schuldner geboten wird, mit E und den Abzinsungsfaktor, der den p' Prozenten entspricht, mit v' so erhält man analog dem früheren die Gleichung

$$c\,(v') + c\,(v')^2 + \cdots\cdots + c\,(v')^n = E,$$

woraus folgt, daß

$$E = c\,a'_{\overline{n|}} \quad \text{oder} \quad E = c\,\frac{1 - (v')^n}{i'} \quad \text{ist.}$$

Der Schuldner bekommt nun statt des Kapitals N die Summe E, mithin statt einer Kapitalseinheit den Betrag $\frac{E}{N}$ und statt 100 Kapitalseinheiten den Betrag

$$\frac{100\,E}{N}.$$

Man nennt den Betrag $\frac{100\,E}{N}$ den *Kurs (Emissionskurs) des Anlehens*, während N der *Nominalwert* und E der *Effektivwert* des Anlehens genannt wird. Bezeichnen wir den Knrswert des Anlehens mit K, so ist

$$K = 100\,\frac{E}{N}$$

oder

$$K = 100\,\frac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$$

oder auch

$$K = 100\,\frac{p\,[1-(v')^n]}{p'\,(1-v^n)}.$$

Je größer n wird, um so kleiner ist $(v')^n$ und v^n; für $n=\infty$ ist

$$\lim\,[(v')^n]_{n=\infty} = 0 \quad \text{und} \quad \lim\,[v^n]_{n=\infty} = 0.$$

Der Kurs eines solchen Anlehens, das keiner Tilgung unterliegt, z. B. einer ewigen Rente (Konsols), hat den Wert

$$K = 100\,\frac{p}{p'}.$$

Beispiel.

Jemand macht eine Anleihe von K 1,000.000·—, welche aus 2000 Obligationen à K 500·— besteht und bei 4prozentiger, dekursiver Verzinsung in 42 Jahren durch eine am Schlusse eines jeden Jahres fällige und sich gleich bleibende Annuität getilgt werden soll. Der Gläubiger will, daß sich sein Geld mit $4\frac{1}{2}$ Prozent verzinst. Zu welchem Kurse muß das Anlehen begeben werden, wenn jede Obligation zu ihrem Nennwert eingelöst wird?

Den Kurs findet man nach der Gleichung

$$K = 100\,\frac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$$

und erhält mit Hilfe der Tabelle IV

$$K = 92{\cdot}76.$$

Wie groß würde der Kurs in dem vorhergehenden Beispiele sein, wenn jede von den $m=2000$ Obligationen statt mit dem Nennwerte $C = K$ 500·— mit dem Betrage $C' = K$ 525·— eingelöst wird?

Wenn man den Aufzinsungsfaktor $1+\frac{C}{C'}\,i$ mit q bezeichnet, so müßte der Schuldner jährlich die Annuität

$$c = \frac{m\,C\,i\,q^n}{q^n-1}$$

zahlen, um das Anlehen mit dem Nominalwerte $N = m\,C$ in n Jahren tilgen zu können, während er vom Gläubiger für dieses Anlehen den Betrag

$$E = c\,a'_{\overline{n}|} \text{ oder } E = \frac{m\,C\,i\,q^n}{q^n-1}\cdot a'_{\overline{n}|}$$

erhält.

Man findet mithin für dieses Anlehen den Kurs, wenn man 100 E durch N dividiert, also

$$K = 100\,\frac{i\,q^n}{q^n-1}\,a'_{\overline{n}|}$$

oder, da $a'_{\overline{n}|} = \frac{1-(v')^n}{i'}$ ist,

$$K = 100\,\frac{p\,q^n}{p'}\cdot\frac{1-(v')^n}{q^n-1}.$$

Nach Einsetzung der entsprechenden Werte und nach Ausführung der diesbezüglichen Rechnung erhält man für den Kurs den Wert

$$K = 94{\cdot}56.$$

2. Sind zwei Anlehenskurse K und K' so beschaffen, daß es gleich ist, ob man das Anlehen mit dem Effektivwerte E zum Kurse K und dem Prozentsatze p oder zum Kurse K' und dem Prozentsatze p' aufnimmt, so sagt man, es bestehe zwischen den beiden Kursen K und K' die *Parität*. Hiebei ist es gleichgiltig, ob die Tilgungszeit in beiden Fällen übereinstimmt oder nicht. Setzen wir voraus, daß die Tilgungszeit in beiden Fällen dieselbe ist und nehmen wir an, es nimmt jemand ein Anlehen mit dem Effektivwerte E auf, welches er in n Jahren durch eine am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuität tilgen will. Es werden ihm nun zwei Angebote gemacht, nach dem einen soll der Nominalwert des Anlehens zum Kurse K mit p Prozent verzinst werden. Wie stellt sich der paritätische Kurs des zweiten Anerbietens, wenn das Anlehen mit p' Prozent verzinst wird?

Bezeichnen wir den Nominalwert des Anlehens bei p-prozentiger Verzinsung mit N, so ist, wenn c die Annuität bedeutet,

$$N = c\,a_{\overline{n}|}$$

während das Anlehen mit dem Nominalwerte N' bei gleicher Annuitätenzahlung und bei p'-prozentiger Verzinsung den Wert hat

$$N' = c\,a'_{\overline{n}|}.$$

Im ersten Falle ist der Kurswert des Anlehens

$$K = 100\,\frac{E}{N},$$

woraus sich

$$K\,N = 100\,E$$

ergibt. Im zweiten Fall wäre der Kurswert

$$K' = 100 \frac{E}{N'},$$

woraus folgt, daß

$$K' N' = 100\, E \quad \text{ist.}$$

Es besteht mithin die Gleichung

$$K N = K' N'$$

oder

$$K a_{\overline{n}|} = K' a'_{\overline{n}|},$$

woraus sich, wenn K, $a_{\overline{n}|}$ und $a'_{\overline{n}|}$ gegeben sind, der *paritätische Kurs* K', wie folgt, berechnen läßt.

Es ist

$$K' = \frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}} K$$

oder

$$K' = \frac{p K}{p'} \frac{1 - v^n}{1 - (v')^n}.$$

Für $n = \infty$ ergibt sich, da

$$lim\ [v^n]_{n=\infty} = 0 \quad \text{und} \quad lim\ [(v')^n]_{n=\infty} = 0$$

ist, der *paritätische Kurs* der ewigen Rente

$$K' = \frac{p}{p'} K.$$

Beispiel.

Eine Gemeinde will ein Anlehen aufnehmen, welches in 35 Jahren mittels Zahlung gleicher Annuitäten getilgt werden soll. Je nach der Wahl des Gläubigers soll das Anlehen mit 5 oder mit $4^1/_2$ Prozent verzinst werden. Der Gläubiger entschließt sich, das 5prozentige Anlehen zum Kurse 96·30 zu übernehmen. Zu welchem Kurse müßte der Schuldner das $4^1/_2$prozentige Anlehen hergeben?

Wendet man die Gleichung

$$K' = \frac{a_{\overline{n}|}}{a'_{\overline{n}|}} K$$

auf dieses Beispiel an, so erhält man nach Einsetzung der entsprechenden Werte für $a_{\overline{n}|}$, $a'_{\overline{n}|}$ und K den paritätischen Kurs

$$K' = \frac{16{\cdot}3741\,9429}{17\,4610\,1240} \times 96{\cdot}30$$

oder

$$K' = 90{\cdot}31.$$

§ 28. *Kurse von Anlehen, die durch gleiche Quoten nebst Zinsen getilgt werden.*

Ein Anlehen N soll in n Jahren durch eine am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuität derart amortisiert werden, daß die jeweilige Annuität zur Tilgung der Schuld mit einem konstanten Be-

trage $\frac{N}{n} = t$ und zur Zahlung der dem Schuldreste entsprechenden p'-prozentigen Zinsen verwendet wird. Der Gläubiger stellt dabei die Bedingung, daß das von ihm ausgeliehene Kapital E zu p Prozent, wobei $p > p'$ ist, verzinst werden soll.

Welches ist der Effektivwert E dieses Anlehens und wie stellt sich der Kurs desselben?

Die Annuitäten, die am Schlusse des ersten, zweiten, dritten ...... $n$ten Jahres gezahlt werden, sind der Reihe nach gleich

$$t + N i',\ t + (N - t) i',\ t + (N - 2t) i',\ \ldots\ldots\ t + [N - (n-1) t]\, i'.$$

Nun muß der Effektivwert des Anlehens der Summe der Barwerte sämtlicher Annuitäten gleich sein.

Es ist also

$$E = (t + N i') v + [t + (N - t) i'] v^2 + \cdots\cdots + \{t + [N - (n-1) t]\, i'\} v^n$$

oder

$$E = (t + N i')(v + v^2 + \cdots\cdots + v^n) - [v + 2 v^2 + 3 v^3 + \cdots\cdots + (n-1) v^{n-1}]\, t v i'.$$

Setzt man

$$a = v + 2 v^2 + 3 v^3 + \cdots\cdots + (n-1) v^{n-1},$$

multipliziert beide Seiten dieser Gleichung mit v und subtrahiert dann die beiden Gleichungen voneinander, so erhält man zunächst

$$a v = v^2 + 2 v^3 + 3 v^4 + \cdots\cdots + (n-1) v^n,$$

dann

$$a (1 - v) = v + v^2 + v^3 + \cdots\cdots + v^{n-1} - (n-1) v^n$$

und

$$a (1 - v) = a_{\overline{n}|} - n v^n.$$

Nun ist aber

$$\frac{1 - v^n}{i} = a_{\overline{n}|},$$

woraus sich

$$v^n = 1 - i a_{\overline{n}|}$$

ergibt Ferner ist

$$1 - v = v i.$$

Nach Substitution dieser Werte in die obige Gleichung bekommt man zunächst

$$a = \frac{1}{v i} (a_{\overline{n}|} - n + n i a_{\overline{n}|})$$

und dann

$$E = (t - N i') a_{\overline{n}|} - \frac{t i'}{i} (a_{\overline{n}|} - n + n i a_{\overline{n}|})$$

oder, da $t = \frac{N}{n}$ ist,

$$E=\frac{N}{n}a_{\overline{n}|}+N\,i'\,a_{\overline{n}|}-\frac{N\,i'}{n\,i}a_{\overline{n}|}+\frac{N\,i'}{i}-N\,i'\,a_{\overline{n}|}$$

oder endlich

$$E=\frac{N}{i}\left(i'+\frac{i-i'}{n}a_{\overline{n}|}\right).$$

Den Kurs des Anlehens findet man, indem man $100\,E$ durch N dividiert, also

$$K=\frac{100}{p}\left(p'+\frac{p-p'}{n}a_{\overline{n}|}\right).$$

Beispiel.

Eine Schuld soll in 40 Jahren derart getilgt werden, daß am Schlusse eines jeden Jahres nicht nur der vierzigste Teil derselben als Tilgungsquote, sondern auch die jeweiligen dem Schuldreste entsprechenden $4^1/_2$prozentigen Zinsen entrichtet werden. Wie hoch stellt sich der Kurswert dieses Anlehens, wenn der Gläubiger 5 Prozent rechnet?

Mit Benützung der Gleichung

$$K=\frac{100}{p}\left(p'+\frac{p-p'}{n}a_{\overline{n}|}\right)$$

erhält man

$$K=\frac{100}{5}\left(4{\cdot}5+\frac{5-4{\cdot}5}{40}\times 17{\cdot}1590\,8635\right)$$

oder

$$K=94{\cdot}29.$$

§ 29. *Konvertierung von Anlehen.*

Darunter versteht man die Umwandlung hochverzinslicher Anlehen in weniger hochverzinsliche, die Vereinigung mehrerer Anlehen mit verschiedenen Tilgungsbedingungen zu einem Gesamtanlehen usw. Die Konvertierung geschieht durch Abänderung der Rückzahlungsbedingungen und durch Herabsetzung des Zinsfußes oder wie bei ewigen Renten nur durch Herabsetzung des Zinsfußes.

Bei den Konvertierungen wird in den meisten Fällen ein Ersparnis an Zinsen dadurch erreicht, daß dem Gläubiger ein viel niederer Kurs als Umwandlungskurs angeboten wird, als der rechnerisch sich ergebende Kurs beträgt So z. B. wurde im Jahre 1883 die 5prozentige französische Rente in eine $4^1/_2$prozentige derart umgewandelt, daß die Besitzer der 5prozentigen Rente, die einen Kurs von über 118 hatte, für je Fr. 5·— Rente bar Fr. 100 — oder für je Fr. 5·— Rente einen neuen Schuldschein auf Fr. 100·— bekamen, der nur mit $4^1/_2$ Prozent verzinst war. Dadurch ersparte Frankreich jährlich an Zinsen Fr. 35,000.000·—.

Um sich mit dem mathematischen Vorgang, der bei Konvertierungen von Anlehen angewendet wird, näher vertraut zu machen,

nehmen wir an, daß von einem Anlehen N noch m Obligationen mit dem Nennwerte C vorhanden sind, welche mit p Prozent verzinst in n Jahren durch eine am Schlusse jedes Jahres fällige Annuität al pari, d. i. zum Nennwert eingelöst werden. Dieses Anlehen soll durch Konvertierung in ein solches umgewandelt werden, welches aus m' Obligationen mit dem Nennwert C' bestehen soll, wobei die Obligationen bei p'-prozentiger Verzinsung in n' Jahren durch eine am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuität c' al pari eingelöst werden.

Wie viel neue Obligationen können gegen alte ausgefolgt werden, wenn die Umwandlung auf Grund von p'' Prozent vorgenommen wird?

Nach den alten Rückzahlungsbedingungen beträgt die Annuität, die noch durch n Jahre zu zahlen wäre,

$$c=\frac{N}{a_{\overline{n}|}}$$

oder, da $N=m\,C$ ist,

$$c=\frac{m\,C}{a_{\overline{n}|}}\text{ oder auch }c=\frac{m\,C\,i}{1-v^n},$$

während nach der Umwandlung eine Annuität von

$$c'=\frac{m'\,C'}{a'_{\overline{n'}|}}\text{ oder auch }c'=\frac{m'\,C'\,i'}{1-(v')^{n'}}$$

durch n' Jahre gezahlt wird.

Wenn wir die Barwerte dieser durch n beziehungsweise n' Jahre fälligen Annuitäten c und c' bei p''-prozentiger Verzinsung bestimmen, so erhalten wir durch deren Gleichsetzung, wie viel neue Obligationen gegen alle umzutauschen wären.

Mithin findet man, wenn die Barwerte dieser Annuitäten

$$c\,.\,a''_{\overline{n}|}\text{ oder }c\,\frac{1-(v'')^n}{i''}\text{ und }c'\,a''_{\overline{n'}|}\text{ oder }c'\,\frac{1-(v'')^{n'}}{i''}$$

einander gleichgesetzt werden,

$$c'\,.\,a''_{\overline{n'}|}=c\,a''_{\overline{n}|}\text{ oder }c'\,[1-(v'')^{n'}]=c\,[1-(v'')^n]$$

oder, wenn man darin für c' und c deren Werte einsetzt,

$$m'\,C'\cdot\frac{a''_{\overline{n'}|}}{a'_{\overline{n'}|}}=m\,C\,\frac{a''_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$$

oder auch

$$m'\,C'\,i'\,\frac{1-(v'')^{n'}}{1-(v')^{n'}}=m\,C\,i\,\frac{1-(v'')^n}{1-v^n},$$

woraus sich das Verhältnis der Obligationenanzahl, welches wir mit z bezeichnen,

$$z = \frac{m'}{m} = \frac{C}{C'} \, \frac{a'_{\overline{n'}|}\, a''_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}\, a''_{\overline{n'}|}}$$

oder

$$z = \frac{m'}{m} = \frac{C p}{C' p'} \, \frac{[1-(v')^{n'}]\,[1-(v'')^{n}]}{[1-v^{n}]\,[1-(v'')^{n'}]} \text{ ergibt.}$$

Dieses Verhältnis $\frac{m'}{m}$ wird mit wachsendem p'' größer oder kleiner, je nachdem $n' > n$ oder $n' < n$ ist. Für den Schuldner ist es natürlich bei der Konvertierung günstiger, wenn $n' > n$ ist, einen kleineren, im entgegengesetzten Falle, wenn $n' < n$ ist, einen größeren Prozentsatz p'' zu wählen.

Ist $n' = n$, d. h. wird die Zeit bei der Konvertierung nicht geändert, so geht obiges Verhältnis über in

$$z = \frac{m'}{m} = \frac{C}{C'} \, \frac{a'_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$$

oder in

$$z = \frac{m'}{m} = \frac{C p}{C' p'} \, \frac{1-(v')^{n}}{1-v^{n}},$$

welches, wie man sieht, von dem Prozentsatze p'' vollkommen unabhängig ist.

Beispiele.

1. Ein Anlehen, das noch aus 1200 Obligationen à K 500·— besteht und in 40 Jahren bei einer 5prozentigen Verzinsung durch eine am Schlusse eines jeden Jahres zahlbare Annuität getilgt werden soll, wird in ein neues 4prozentiges Anlehen umgewandelt, das aus Obligationen à K 200·— besteht und in 30 Jahren getilgt werden soll. Wie viel neue Obligationen sind gegen alte auszufolgen, wenn der Umwandlungsprozentsatz $4\frac{1}{2}$ Prozent beträgt?

Die Substitution der gegebenen Werte in die Gleichung

$$z = \frac{m'}{m} = \frac{C\, a'_{\overline{n'}|}\, a''_{\overline{n}|}}{C'\, a_{\overline{n}|}\, a''_{\overline{n'}|}}$$

gibt

$$z = \frac{500 \times 17{\cdot}2920\,3330 \times 18{\cdot}4015\,8442}{200 \times 17{\cdot}1590\,8635 \times 16{\cdot}2888\,8854}$$

oder $$z = 2{\cdot}846.$$

Es wären also für 1000 alte Obligationen 2846 neue auszufolgen. Der Schuldner wird jedoch weniger ausfolgen, wenn ihm die Konvertierung einen Vorteil bringen soll.

2. Ein 5prozentiges und dekursiv verzinstes Anlehen, das durch gleich große Jahresannuitäten in 35 Jahren getilgt wird, soll in ein

$4\frac{1}{2}$prozentiges Anlehen von gleichem Nennwerte und gleicher Tilgungszeit umgewandelt werden. Wie viel alte Obligationen können gegen neue umgetauscht werden?

In diesem Falle ergibt die Gleichung

$$z = \frac{m'}{m} = \frac{C\, a'_{\overline{n'}|}\, a''_{\overline{n}|}}{C'\, a_{\overline{n}|}\, a''_{\overline{n'}|}},$$

da $C = C'$ und $a''_{\overline{n'}|} = a''_{\overline{n}|}$ ist,

$$z = \frac{17{\cdot}4610\,1240}{16{\cdot}3741\,9429}$$

oder

$$z = 1{\cdot}066.$$

Es können mithin für 1000 alte Obligationen 1066 neue ausgefolgt werden.

3. Eine $4\frac{1}{2}$prozentige und aus Obligationen à K 100·— bestehende Anleihe, die durch gleich große am Schlusse eines jeden Jahres zahlbare Annuitäten in 36 Jahren getilgt wird, soll in eine 4prozentige ewige Rente umgewandelt werden. Wie geschieht diese Umwandlung, wenn sie auf Grund von $3\frac{1}{2}$ Prozent vorgenommen wird?

Durch Anwendung der Gleichung

$$z = \frac{m'}{m} = \frac{C p}{C' p'} \, \frac{[1-(v')^{n'}]\,[1-(v'')^{n}]}{[1-v^{n}]\,[1-(v'')^{n'}]}$$

erhält man, da $C = C'$ und $n' = \infty$ ist,

$$z = \frac{4{\cdot}5}{4} \, \frac{1 - 0{\cdot}2898\,3272}{1 - 0{\cdot}2050\,2817}$$

oder $$z = 1{\cdot}005,$$

d. h man bekommt für je K 1.000·— der Anleihe K 1.005·— ewige Rente.

II. ABSCHNITT.

Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 30. *Einfache Wahrscheinlichkeiten.*

Angenommen, in einer Urne befinden sich 2 schwarze und 19 weiße, gleich große und gleich schwere Kugeln, aus welcher eine gezogen werden soll, so sagen wir, daß das Ziehen einer schwarzen Kugel — welcher *Tatbestand* auch *Ereignis* genannt wird — zwar möglich aber höchst unwahrscheinlich ist; dagegen sagen wir, daß das Ziehen einer weißen Kugel nicht allein möglich, sondern auch höchst wahrscheinlich ist.

Den Grad der *Wahrscheinlichkeit*, eine schwarze Kugel zu ziehen, drücken wir durch den Bruch $\frac{2}{21}$ aus, da nämlich 2 Fälle (Kugeln) für das Ziehen einer schwarzen Kugel *günstig* und 21 Fälle (Kugeln) überhaupt *möglich* sind. Ebenso ist der mathematische Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, $\frac{19}{21}$; in diesem Falle sind für das Ziehen einer weißen Kugel 19 Fälle günstig und 21 Fälle möglich.

Es wird mithin *der Quotient aus der Anzahl jener Fälle, welche dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, durch die Anzahl der überhaupt möglichen Fälle die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses genannt.*

Bezeichnen wir mit g die Anzahl der einem Ereignisse (E) günstigen und mit m die Anzahl aller möglichen Fälle, so ist der mathematische Ausdruck der Wahrscheinlichkeit (probabilité) p für das Eintreffen dieses Ereignisses

$$p = \frac{g}{m}.$$

Wenn alle möglichen und günstigen Fälle im vorhinein bestimmt

werden können, so nennt man die aus diesen Fällen gebildete Wahrscheinlichkeit auch die „*Wahrscheinlichkeit a priori*" im Gegensatze zu der „*Wahrscheinlichkeit a posteriori*", bei welcher man sich mit erfahrungsmäßigen Zahlen begnügen muß, die gegebenen Tatsachen erst nachträglich entnommen werden.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird im allgemeinen durch einen echten Bruch angegeben, der mit zunehmendem g, d. h. je mehr Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, sich dem oberen Grenzwerte 1 nähert und der dann eine *Notwendigkeit* oder *Gewißheit* des Eintreffens des Ereignisses (E) darstellt, dagegen mit abnehmendem g, d. h. je weniger Fälle dem Eintreffen des Ereignisses günstig sind, sich dem unteren Grenzwerte Null nähert und die *Unmöglichkeit* des Eintreffens des Ereignisses (E) ausdrückt.

Die Zahl aller möglichen Fälle m setzt sich aus der Zahl der dem Ereignisse (E) *günstigen Fälle g* und aus der Zahl der dem Ereignisse (E) *ungünstigen Fälle u* zusammen, mithin ist die Zahl der letzteren Fälle

$$u = m - g.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines dem Ereignisse (E) ungünstigen Falles oder des dem E entgegengesetzten Ereignisses $(\bar{E})$, die man auch deswegen *entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit* nennt und mit q bezeichnet, ist mithin

$$q = \frac{u}{m} = \frac{m-g}{m}$$

oder

$$q = 1 - \frac{g}{m}$$

oder auch

$$q = 1 - p,$$

woraus sich

$$p + q = 1$$

ergibt.

Zwei entgegengesetzte Ereignisse (E und $\bar{E}$) besitzen Wahrscheinlichkeiten, die sich zur Einheit ergänzen; man sagt, sie sind zueinander *komplementär*.

Um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen zu können, muß man die Anzahl der möglichen und der günstigen Fälle bestimmen, was meistens durch Anwendung der Kombinationslehre geschieht. Mitunter berechnet man auch die Wahrscheinlichkeit am bequemsten aus der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit. Wenn z. B. nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, beim zweimaligen Aufwerfen einer Münze einmal die „Schrift" zu werfen, so sind, da jeder der beiden möglichen Fälle eines Wurfes mit jedem Fall der übrigen Würfe zusammentreffen

kann, $2 \cdot 2 = 4$ Fälle möglich, wovon nur einer ungünstig ist. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit wäre $\frac{1}{4}$ und die gesuchte mithin

$$p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Beispiele.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln, deren Seitenflächen die Nummern 1, 2, 3, ... 6, sogenannte Augen, tragen, eine bestimmte Summe, z. B. 9 zu werfen?

Bildet man die Anzahl der Variationen mit Wiederholung zur zweiten Klasse von den 6 Elementen 1, 2, ... 6, so erhält man $6^2 = 36$, welche uns die Anzahl der möglichen Fälle gibt.

Mit zwei Würfeln können nämlich folgende Summen geworfen werden:

2 : 11,
3 : 12, 21,
4 : 13, 22, 31,
5 : 14, 23, 32, 41,
6 : 15, 24, 33, 42, 51,
7 : 16, 25, 34, 43, 52, 61,
8 : 26, 35, 44, 53, 62,
9 : 36, 45, 54, 63,
10 : 46, 55, 64,
11 : 56, 65,
12 : 66.

Wenn man die Wahrscheinlichkeit, die Summe 9 zu werfen mit $p(9)$ bezeichnet, so findet man, da in diesem Falle dem Eintreffen des Ereignisses 4 Fälle günstig sind,

$$p(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Ebenso ist:

$$p(2) = p(12) = \frac{1}{36}, \quad p(3) = p(11) = \frac{1}{18}, \quad p(4) = p(10) = \frac{1}{12},$$

$$p(5) = p(9) = \frac{1}{9}, \quad p(6) = p(8) = \frac{5}{36} \quad \text{und} \quad p(7) = \frac{1}{6}.$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln in einem Wurf einen Pasch, d. h. wenn die zwei Würfel eine gleiche Anzahl Augen zeigen und wie groß in 2 Würfen mindestens einmal den Pasch von 4 zu werfen?

a) Hier sind dem Eintreffen des Ereignisses 6 Fälle günstig, während die Zahl aller möglichen Fälle 36 ist, daher hat die gesuchte Wahrscheinlichkeit, in einem Wurf einen Pasch zu werfen, den Wert

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

b) Unter den 36 möglichen Fällen, welche in *einem* Wurf eintreten können, sind 35 Fälle, die das entgegengesetzte Ereignis herbeiführen. Daher gibt es in 2 Würfen 36^2 mögliche und 35^2 ungünstige Fälle.

Die Wahrscheinlichkeit in 2 Würfen den Pasch von 4 *nicht* zu werfen, beträgt

$$q = \frac{35^2}{36^2} = \frac{1225}{1296}$$

und den Pasch von 4 zu werfen

$$p = 1 - \frac{1225}{1296} = \frac{71}{1296}.$$

Man kann aber auch umgekehrt aus einer gegebenen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die Zahl bestimmen, wie oft dieses Ereignis eintritt, so z. B. wenn gefragt wird, wie oft man mit zwei Würfeln werfen muß, damit wenigstens einmal beide Würfel den Pasch von 4 zeigen, so hat man folgende Auflösung.

Wie bereits erwähnt, gibt es in *einem* Wurf von den 36 möglichen Fällen 35 Fälle, die das erwartete Ereignis *nicht* herbeiführen, daher gibt es in x Würfen 36^x mögliche und 35^x ungünstige Fälle, so daß die Wahrscheinlichkeit, daß das Gegenteil eintritt, $\left(\frac{35}{36}\right)^x$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß das erwartete Ereignis in x Würfen wenigstens einmal eintritt, ist daher

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^x,$$

welche Wahrscheinlichkeit jedoch größer sein muß als ihre entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, also $> \frac{1}{2}$.

Für $p = \frac{1}{2}$ würde sich aus der Gleichung

$$\left(\frac{35}{36}\right)^x = \frac{1}{2}$$

der Wert für

$$x = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{\cdot}605$$

ergeben. Da aber $x > 24{\cdot}605$ sein muß, so tritt das erwartete Ereignis mit zwei Würfeln wenigstens einmal den Pasch von 4 zu werfen erst in 25 Würfen ein.

3. Eine Lotterie besteht aus n Nummern, wovon in jeder Ziehung s Nummern gezogen werden. Jemand hat auf r Nummern, wobei $r \leq s$ ist, gesetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummern in beliebiger Ordnung gezogen werden?

Die möglichen Fälle ergeben sich durch die Kombination von n Elementen ohne Wiederholung zur $s$ten Klasse, ihre Anzahl ist mithin

$$m = C_n^s = \binom{n}{s} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-s+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots s}$$

oder auch

$$m = \frac{n!}{s!\,(n-s)!}.$$

Für die Anzahl der günstigen Fälle kommen nur die Kombinationen ohne Wiederholung von $(n-r)$ Elementen zur $(s-r)$ten Klasse in Betracht und man erhält somit

$$g = C_{n-r}^{s-r} = \binom{n-r}{s-r} = \frac{(n-r)(r-r-1)\ldots\ldots(n-s+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(s-r)}$$

oder

$$g = \frac{(n-r)!}{(s-r)!\,(n-s)!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist hiernach

$$p = \frac{(n-r)!\,s!}{n!\,(s-r)!} = \frac{s(s-1)\ldots\ldots(s-r+1)}{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}.$$

Ist z. B. $n = 90$, $s = 5$ und wettet man, daß unter den 5 gezogenen Nummern sich 1, 2, 3, 4 oder 5 im vorhinein angegebene Nummern befinden, so ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen für einen *Auszug*, d. i. für das Erraten einer Nummer, da $r = 1$ ist,

$$p_1 = \frac{5}{90} = \frac{1}{18},$$

für eine *Ambe*, d. i. für das Erraten zweier Nummern, da $r = 2$ ist,

$$p_2 = \frac{5\,.\,4}{90\,.\,89} = \frac{2}{801} = \frac{1}{400{\cdot}5},$$

für eine *Terne*, d. i. für das Erraten dreier Nummern, da $r = 3$ ist,

$$p_3 = \frac{5\,.\,4\,.\,3}{90\,.\,89\,.\,88} = \frac{1}{11.748}$$

für eine *Quaterne*, d. i. für das Erraten von 4 Nummern, da $r = 4$ ist,

$$p_4 = \frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87} = \frac{1}{511.038}$$

und für eine *Quinterne*, d. i. für das Erraten aller 5 Nummern, da $r = 5$ ist

$$p_5 = \frac{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87\,.\,86} = \frac{1}{43{,}949.268}.$$

Bei den *Auszügen* unterscheidet man *bestimmte* und *unbestimmte* Auszüge. Der bestimmte Auszug fordert das Erraten einer Nummer an bestimmter Stelle, also als erste oder als zweite usf. oder als fünfte gezogene Nummer. In diesem Falle ist die Anzahl der günstigen Fälle

$$g = C_1^1 = 1,$$

mithin ist die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Auszug zu gewinnen

$$p_1' = \frac{1}{90}.$$

Die bisher angegebenen Wahrscheinlichkeiten können als Wahrscheinlichkeiten an und für sich oder als *absolute* Wahrscheinlichkeiten bezeichnet werden im Gegensatze zu jenen, deren Werte mit anderen Wahrscheinlichkeiten verglichen werden und *relative* Wahrscheinlichkeiten heißen.

Bei den relativen Wahrscheinlichkeiten werden unter den möglichen Fällen nur jene berücksichtigt, welche entweder dem einen oder dem anderen der in Betracht gezogenen Ereignisse günstig sind, während jene Fälle, welche keinem von beiden günstig sind, unbeachtet bleiben. Sind von den m möglichen Fällen zweier Ereignisse E_1 und E_2 dem ersten Ereignisse g_1 und dem zweiten Ereignisse g_2 Fälle günstig mit den absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen dieser Ereignisse

$$p_1 = \frac{g_1}{m} \text{ und } p_2 = \frac{g_2}{m},$$

so ist die relative Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des ersten Ereignisses in bezug auf das zweite

$$P_1 = \frac{g_1}{g_1 + g_2}$$

und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des zweiten Ereignisses in bezug auf das erste

$$P_2 = \frac{g_2}{g_1 + g_2}$$

oder, indem man Zähler und Nenner durch m dividiert

$$P_1 = \frac{\frac{g_1}{m}}{\frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m}} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{\frac{g_2}{m}}{\frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m}}$$

oder endlich

$$P_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \quad \text{und} \quad P_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2}.$$

Die relativen Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen zweier Ereignisse sind mithin gleich ihren absoluten Wahrscheinlichkeiten dividiert durch die Summe der beiden absoluten Wahrscheinlichkeiten.

Die beiden relativen Wahrscheinlichkeiten selbst ergänzen sich zur Einheit.

Es ist nämlich

$$P_1 + P_2 = 1.$$

Beispiel.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, in welcher sich 6 weiße, 5 rote und 4 schwarze, gleich große und gleich schwere Kugeln befinden, *eher* eine weiße als eine schwarze Kugel zu ziehen?

Hier ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen

$$p_1 = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

und die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen

$$p_2 = \frac{4}{15},$$

daher ist die Wahrscheinlichkeit *eher* eine weiße als eine schwarze Kugel zu ziehen

$$P_1 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{4}{15}} = \frac{3}{5}.$$

§ 31. *Vollständige Wahrscheinlichkeit.*

Lassen sich von den g günstigen Fällen eines Ereignisses (E) g_1 günstige Fälle der ersten Art, g_2 günstige Fälle der zweiten Art, ... g_r günstige Fälle der $r$ten Art dieses Ereignisses derart sondern, daß

$$g_1 + g_2 + \cdots\cdots + g_r = g$$

ist und sind, wenn m die Anzahl der möglichen Fälle des Ereignisses (E) bedeutet,

$$p_1 = \frac{g_1}{m}, \quad p_2 = \frac{g_2}{m}, \quad \ldots\ldots \quad p_r = \frac{g_r}{m}$$

die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen eines Falles bezüglich der ersten, der zweiten, ... der $r$ten Art, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß von den letzteren irgend ein, also *entweder der eine oder der andere Fall* eintritt,

$$p = \frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \cdots\cdots + \frac{g_r}{m}$$

oder es ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (E) bestimmt durch

$$p = p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_r.$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (E), das auf mehrere einander ausschließende Arten eintreffen kann, gleich der Summe der den einzelnen Arten des Eintreffens zukommenden Wahrscheinlichkeiten. (Additionsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung.)

Die Wahrscheinlichkeit p wird die *vollständige* oder *totale* Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (E) genannt im Gegensatze zu den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, ... p_r, die man *partielle* Wahrscheinlichkeiten nennt.

Beispiele.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einer Urne, in welcher sich 2 weiße, 3 rote, 4 blaue und 5 gelbe Kugeln befinden, eine farbige Kugel zu ziehen?

Zu den farbigen Kugeln gehören die roten, blauen und gelben Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, wäre $p_{\text{rote}} = \frac{3}{14}$, eine blaue $p_{\text{blaue}} = \frac{4}{14}$ und eine gelbe Kugel zu ziehen $p_{\text{gelbe}} = \frac{5}{14}$.

Die Wahrscheinlichkeit, entweder eine rote oder eine blaue oder eine gelbe, also überhaupt eine farbige Kugel zu ziehen, ist

$$p = \frac{3}{14} + \frac{4}{14} + \frac{5}{14} = \frac{6}{7}.$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln eine ungerade Summe zu werfen?

Die ungeraden Summen 3, 5, 7, 9 und 11 zu werfen, haben als Arten des Eintreffens des bezeichneten Ereignisses aufgefaßt, die Wahrscheinlichkeiten nach S. 92

$$p(3) = p(11) = \frac{1}{18}, \quad p(5) = p(9) = \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad p(7) = \frac{1}{6}.$$

Mithin ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln eine ungerade Zahl als Summe zu werfen

$$p = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2}.$$

§ 32. *Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.*

Zwei oder mehrere voneinander unabhängige Ereignisse E_1, E_2, ... E_r hängen derart mit dem Ereignisse E zusammen, daß das Ereignis E dann eintritt, wenn sowohl das Ereignis E_1, als auch das Ereignis E_2, ... als auch das Ereignis E_r eingetreten ist.

Dem Ereignisse E_1 sind von den m_1 möglichen Fällen g_1 günstig, dem zweiten E_2 sind von den m_2 möglichen Fällen g_2 günstig usf. und dem $r$ten Ereignisse E_r sind von den den m_r möglichen Fällen g_r günstig. Es kann jeder der m_1 möglichen Fälle des ersten Ereignisses E_1 mit jedem der m_2 möglichen Fälle des zweiten, jeder der so erhaltenen $m_1\, m_2$ möglichen Fälle mit jedem der m_3 des dritten Ereignisses zusammentreffen usw.; daher ist die Anzahl aller überhaupt möglichen Fälle

$$m = m_1\, m_2 \ldots\ldots m_r.$$

In gleicher Weise ergibt sich die Anzahl aller günstigen Fälle

$$g = g_1\, g_2 \ldots\ldots g_r.$$

Mithin ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E

$$p = \frac{g}{m} = \frac{g_1}{m_1}\,\frac{g_2}{m_2} \ldots\ldots \frac{g_r}{m_r}.$$

Nun ist $\frac{g_1}{m_1} = p_1$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_1 an sich allein, ebenso $\frac{g_2}{m_2} = p_2$ die vom Ereignisse E_2 usw. und $\frac{g_r}{m_r} = p_r$ die vom Ereignisse E_r, daher ist

$$p = p_1\, p_2 \ldots\ldots p_r.$$

Man nennt also jene Wahrscheinlichkeit (p), welche sich auf das gleichzeitige oder nacheinander folgende Eintreffen zweier oder mehrerer voneinander unabhängiger Ereignisse bezieht, eine *zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, die dem Produkte der einfachen Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen dieser Ereignisse gleich ist.* (*Multiplikationsgesetz* der Wahrscheinlichkeitsrechnung.)

Sind in der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit

$$p = p_1\, p_2 \ldots\ldots p_r$$

die einfachen Wahrscheinlichkeiten einander gleich, also

$$p_2 = p_3 = \ldots\ldots = p_r = p_1,$$

so ist

$$p = p_1^r.$$

In dieser Gleichung stellt uns p_1^r die Wahrscheinlichkeit vor, daß ein und dasselbe Ereignis E_1, dessen einfache Wahrscheinlichkeit p_1 ist, $r$mal *wiederholt* eintritt, falls die Anzahl der günstigen und der möglichen Fälle bei den Wiederholungen unverändert bleibt.

Es ist also die Wahrscheinlichkeit für das rmalige wiederholte Eintreffen eines und desselben Ereignisses gleich der rten Potenz seiner einfachen Wahrscheinlichkeit.

Beispiele.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus jeder von zwei Urnen, von denen die eine 4 weiße und 5 schwarze Kugeln, die andere 6 weiße und 7 schwarze Kugeln enthält, eine weiße Kugel zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit aus der ersten Urne eine weiße Kugel zu ziehen, ist

$$p_1 = \frac{4}{9}$$

und die Wahrscheinlichkeit aus der zweiten Urne ebenfalls eine weiße Kugel zu ziehen, ist

$$p_2 = \frac{6}{13};$$

daher hat die Wahrscheinlichkeit aus jeder der beiden Urnen eine weiße Kugel zu ziehen den Wert

$$p = \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{13} = \frac{8}{39}.$$

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus jedem von zwei Kartenspielen zu 52 Blättern einen Buben zu ziehen?

Dem Eintreffen des Ereignisses aus einem Kartenspiele einen Buben zu ziehen sind 4 Fälle günstig und 52 Fälle möglich, daher ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Kartenspiele einen Buben zu ziehen

$$p_1 = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

In gleicher Weise erhält man für die Wahrscheinlichkeit aus dem zweiten Kartenspiele einen Buben zu ziehen den Wert

$$p_2 = \frac{1}{13}.$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses

$$p = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}.$$

Sollen jedoch die zwei Blätter aus einem und demselben Kartenspiele nacheinander gezogen werden, so verbleiben nach dem ersten Zug

nur mehr 51 Blätter, welche Zahl uns auch alle mögliche Fälle vorstellt, worunter dem Ereignisse nur 3 Fälle günstig sind. Daher ist die Wahrscheinlichkeit im zweiten Zuge einen Buben zu ziehen

$$p_2 = \frac{3}{51} = \frac{1}{17},$$

während die Wahrscheinlichkeit im ersten Zuge einen Buben zu ziehen wie früher

$$p_1 = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

beträgt.

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses

$$p = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}.$$

Wird dagegen die gezogene Karte wieder in das Spiel gelegt, so wäre die Wahrscheinlichkeit zweimal nacheinander einen Buben zu ziehen

$$p = \left(\frac{1}{13}\right)^2 = \frac{1}{169}.$$

Sind p_1 und p_2 die einfachen Wahrscheinlichkeiten zweier voneinander unabhängigen Ereignisse E_1 und E_2, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß

E_1 eintrifft und E_2 nicht eintrifft, gleich $p_1(1-p_2)$,
E_2 „ „ E_1 „ „ , „ $(1-p_1)p_2$,
sowohl E_1 „ als auch E_2 eintrifft, gleich $p_1 p_2$,
weder E_1 „ noch E_2 „ , „ $(1-p_1)(1-p_2)$,
E_1 und E_2 nicht eintreffen, gleich $1 - p_1 p_2$ und daß

nur eines der beiden Ereignisse $(E_1 E_2)$ eintrifft, gleich viel welches, gleich $p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1) = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$.

§ 33. *Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Glücksspiele und Wetten.*

Angenommen in einer Urne befinden sich 2 weiße und 8 schwarze Kugeln und es soll jener, der mit einem Griffe eine weiße Kugel zieht, K 100·— erhalten. Wie groß wäre die Hoffnung diese Summe zu erhalten?

Im vorliegenden Falle haben wir für das Eintreffen des Ereignisses, eine weiße Kugel zu ziehen, 2 *günstige* und 8 *ungünstige* Fälle, mithin überhaupt 10 *mögliche Fälle.*

Würden alle Kugeln gezogen, so müßte der Gewinn von K 100·— absolut sicher sein. Da sämtliche 10 Fälle einen Wert von K 100·— haben, so kommt auf einen Fall nur $\frac{1}{10}$ von jenem Werte. Folglich hat der Fall, eine weiße Kugel zu ziehen, den Erwartungswert von $\frac{2}{10}$ der K 100·—, d. i. von K 20·—.

Wenn auf das Eintreffen eines Ereignisses (E) ein Preis a gesetzt wird, so nennt man das Produkt aus dem Preise und der Wahrscheinlichkeit p für das Eintreffen des zu erwartenden Ereignisses die *mathematische Erwartung* oder die *mathematische Hoffnung* dieses Preises. Dieses Produkt pa stellt uns auch die Größe des *rechtmäßigen Einsatzes* e vor, welchen der das Ereignis erwartende Spieler zu machen hat.

Es ist also

$$e = pa.$$

Mitunter wird auch von einer mathematischen Hoffnung gesprochen, wenn der Faktor a im Produkte pa nicht eine Geldsumme, sondern eine andere vom Zufall abhängige Größe darstellt.

In unserem Beispiele macht also der Spieler einen Einsatz von $e = K$ 20·— und bekommt entweder Nichts oder K 100·—, je nachdem er das Spiel verloren oder gewonnen hat.

Der Spieler bekommt, im Falle er gewinnt, den Betrag a ausbezahlt, verliert aber dafür seinen Einsatz $e = pa$.

Sein Gewinn beträgt mithin

$$g = a - pa = a(1-p)$$

oder, wenn man $1-p$, d. i. die Wahrscheinlichkeit des Unternehmers den Einsatz zu gewinnen, mit q bezeichnet,

$$g = qa.$$

Zwischen dem Einsatz $e = pa$ und dem Gewinne $g = qa$ besteht das Verhältnis

$$e : g = p : q.$$

Bei einem gerechten Spiele oder bei einer Wette verhalten sich mithin die Einsätze der Spielenden, wie ihre Wahrscheinlichkeiten, das Spiel oder die Wette zu gewinnen.

Beteiligen sich mehrere Personen an dem Spiele um denselben Preis e und sind ihre Wahrscheinlichkeiten, um das Spiel zu gewinnen, $p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$ und ihre Einsätze $e_1, e_2, \ldots\ldots e_r$, so muß

$$e_1 : e_2 : \ldots\ldots e_r = p_1 : p_2 : \ldots\ldots p_r$$

sein. Da die Summe sämtlicher Einsätze

$$e_1 + e_2 + \cdots\cdots + e_r = e$$

ist, so ergeben sich aus der obigen fortlaufenden Proportion vorerst die einfachen Proportionen:

$$e_1 : e = p_1 : (p_1 + p_2 + \cdots + p_r),$$
$$e_2 : e = p_2 : (p_1 + p_2 + \cdots + p_r),$$
$$\vdots$$
$$e_r : e = p_r : (p_1 + p_2 + \cdots + p_r),$$

aus denen man dann die einzelnen Einsätze berechnen kann.

Es ist:

$$e_1 = \frac{e\, p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_r},$$
$$e_2 = \frac{e\, p_2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_r},$$
$$\vdots$$
$$e_r = \frac{e\, p_r}{p_1 + p_2 + \cdots + p_r}.$$

Eine Anwendung von der mathematischen Erwartung wird bei der *Versicherung gegen den Verlosungsverlust* und bei der *Veräußerung der Gewinsthoffnung eines Loses, beim sogenannten Promessengeschäfte,* gemacht In beiden Fällen ist die Kenntnis des wahren, beziehungsweise mittleren Wertes eines Loses erforderlich.

Um den *wahren Wert* eines Loses am Tage der $m$ten Ziehung zu bestimmen, muß man vor allem den Gesamtwert aller auf diesen Tag diskontierten Beträge kennen, welche für die $m$te, $(m+1)$te, ... $n$te Ziehung erforderlich sind.

Wären die in den aufeinander folgenden $(n - m + 1)$ Ziehungen erforderlichen Beträge B_m, B_{m+1}, ... B_n, so ist der Gesamtwert dieser Beträge bezogen auf den Tag der $m$ten Ziehung

$$B = B_m + B_{m+1}\, v + \cdots + B_n\, v^{n-m}.$$

Bezeichnet man die Anzahl der Lose, die in der $m$ten, $(m+1)$ten ...... $n$ten Ziehung gezogen werden, mit l_m, l_{m+1} ...... l_n, so ist der *wahre Wert eines Loses* am Tage der $m$ten Ziehung

$$W_m = \frac{B}{l_m + l_{m+1} + \cdots + l_n}.$$

So z. B. ist der wahre Wert eines Loses am Tage der dritten Ziehung von dem auf S. 79 besprochenen Prämienanlehen

$$W_3 = \frac{230948 + 230954\, v + 230980\, v^2}{6176}$$

oder

$$W_3 = \frac{230948 + 230954 \times 0{\cdot}9708\,7379 + 230980 \times 0{\cdot}9425\,9591}{6176}$$

oder endlich

$$W_3 = K\ 108{\cdot}95.$$

Nun soll sich aber der Kurswert K eines Loses von dem wahren Werte W_m desselben nur um die p-prozentigen Zinsen unterscheiden, welche bis zum Verfallstage aufgelaufen sind. Wenn also N der Nominalwert des Loses ist, so soll am Tage der $m$ten Ziehung der Kurswert

$$K = W_m - N\, i$$

sein.

In unserem Beispiele müßte also der Kurs am Tage der 3ten Ziehung den Wert haben

$$K = K\ 108{\cdot}95 - K\ 3 = K\ 105{\cdot}95.$$

In Wirklichkeit aber stellt sich der Kurswert eines Loses bedeutend höher. Kauft jemand ein solches Los zum Kurse von beispielsweise K 140·—, so würde er, wenn das Los in der 3ten Ziehung mit K 100·— gezogen wird, einen effektiven Verlust von K 40·— erleiden.

Gegen diesen eventuellen Verlust von K 40·— kann man sich jedoch durch die sogenannte *Losversicherung* schützen. Ist der effektive Kurswert K' und der für die Versicherung zu zahlende Betrag, die sogenannte *Prämie*, P_m, so findet man, wenn die Wahrscheinlichkeit, das Los in der $m$ten Ziehung mit dem kleinsten Betrage b_m zu ziehen, den Wert

$$p_m = \frac{x_m}{l_m + l_{m+1} + \cdots + l_n}$$

hat, für die Prämie den Betrag

$$P_m = (K' - b_m)\, p_m.$$

In unserem Beispiele müßte der Losbesitzer eine Prämie zahlen von

$$P_3 = 40\, \frac{1988}{6176} = 12{\cdot}875$$

oder von K 12·88.

Die Zahlung dieser Prämie sichert den Losbesitzer nur vor dem Verluste in der dritten Ziehung. Für die weiteren Ziehungen müßte er sich von neuem versichern lassen.

Bedeuten G_1, G_2, ... G_m die in den m aufeinander folgenden Ziehungen vorkommenden Beträge, mit denen die gezogenen Lose eingelöst werden, so ist der *mittlere Wert* eines Loses für $m$te Ziehung

$$\frac{G_m}{l_m}.$$

Da aber die Wahrscheinlichkeit, daß das Los in der $m$ten Ziehung gezogen wird,

$$\frac{l_m}{l_m + l_{m+1} + \cdots\cdots + l_n}$$

ist, so ist die *mathematische Hoffnung* H_m des Loses

$$H_m = \frac{l_m}{l_m + l_{m+1} + \cdots\cdots + l_n} \cdot \frac{G_m}{l_m}$$

oder

$$H_m = \frac{G_m}{l_m + l_{m+1} + \cdots\cdots + l_n}.$$

Bezugnehmend auf unser Beispiel S. 79 ist die mathematische Hoffnung eines Loses, d. i. der Wert einer *Promesse* für die dritte Ziehung

$$H_3 = \frac{13620 + 198800}{6176} = 34{\cdot}394$$

oder K 34·39.

§ 34. *Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeiten von einfachen (einzelnen) Leben.*

Für die Lebensversicherung ist es von besonderer Wichtigkeit, über das Leben und Sterben der versicherten Personen näheres zu erfahren, wie z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß jemand von einem bestimmten Alter innerhalb einer gewissen Zeit gestorben oder noch am Leben sein wird.

Zur Bestimmung der angenäherten Wahrscheinlichkeit dienen in solchen Fällen Ermittlungen, die nach bevölkerungsstatistischen Grundlagen oder auf Grund der statistischen Erfahrungen der Versicherungsgesellschaften über die Sterblichkeit ihrer Versicherten hergestellt sind und welche einen um so größeren Wert haben, je größer die Zahl der angestellten Beobachtungen ist. Hat man z. B. bei einer Versicherungsgesellschaft beobachtet, daß von 100 Personen, die jetzt 30 Jahre alt sind, nach einem Jahre noch 94 leben, so kann man für die Wahrscheinlichkeit einer jetzt 30 Jahre alten Person, daß sie nach einem Jahre noch lebt, die Zahl $\frac{94}{100}$ nehmen. Diese Wahrscheinlichkeit aber bietet, wenn *nur* 100 Personen beobachtet sind, eine sehr geringe Gewähr der Wahrheit nahe zu kommen. Würde sich jedoch die Beobachtung auf eine sehr große Zahl von Versicherten erstrekt und dabei ergeben haben, daß *durchschnittlich* auf je 100 Personen, die 30 Jahre alt sind, nach einem Jahre 94 Personen noch am Leben waren, so würde die Wahrscheinlichkeit $\frac{94}{100}$ eine viel größere Gewähr der Annäherung an die Wirklichkeit bieten. Um ein recht großes Beobachtungsmaterial zur Bestimmung der Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten zu erhalten, vereinigen sich mehrere Gesellschaften, welche unter gleichartigen Verhältnissen arbeiten und fertigen *Tabellen* an, die darüber Aufschluß geben, wie viel Personen von einer großen Gruppe Gleichaltriger noch das nächste, zweitnächste Lebensjahr usw. erreichen, wie auch in welcher Weise dieselben von Jahr zu Jahr absterben.

Eine solche Tafel nennt man eine *Sterbetafel*, die man eigentlich treffender *Überlebenstafel* bezeichnen sollte. Eine Sterbetafel gibt an, wie viele von l_0, sagen wir 100.000, gleichzeitig Geborenen nach 1, 2, 3, ... Jahren noch leben.

Man bezeichnet die Anzahl der 1jährigen, 2jährigen, ... ωjährigen Personen, die am Leben sind, mit l_1, l_2, ... l_ω. Allgemein stellt l_x die Anzahl der Lebenden im Alter von x Jahren vor. Das höchste Alter, welches von den Personen dieser angenommener Grundmaße ganz durchlebt wird, ist ω; daher ist $l_{\omega+1} = 0$.

Wenn wir die Differenz $l_x - l_{x+1}$ bilden, so erhält man die Zahl der Personen, die im Alter von x bis $(x + 1)$ Jahren gestorben sind. Bezeichnen wir diese Zahl der *Toten* mit d_x, so ist

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Setzt man darin für x die Werte 0, 1, ... ω ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} d_0 &= l_0 - l_1, \\ d_1 &= l_1 - l_2, \\ &\vdots \\ d_{\omega-1} &= l_{\omega-1} - l_\omega, \\ d_\omega &= l_\omega. \end{aligned}$$

Addiert man beide Seiten dieser Gleichungen, so bekommt man

$$d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_\omega = l_0,$$

ebenso erhält man für

$$d_x + d_{x+1} + \cdots\cdots + d_\omega = l_x.$$

Ist die Zahl der Lebenden für jedes Alter gegeben, so kann man die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person, nachdem sie das $x$te Lebensjahr erreicht und dasselbe auch vollendet hat, durch den Bruch $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ darstellen. Diesen Bruch bezeichnet man mit p_x und nennt ihn die *Lebenswahrscheinlichkeit* einer $x$jährigen Person.

Es ist mithin

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

ebenso

$$p_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}},$$

$$p_{\omega-1} = \frac{l_\omega}{l_{\omega-1}}$$

und $$p_\omega = 0.$$

Und umgekehrt kann man, wenn man die Lebenswahrscheinlichkeit für jedes Alter kennt, daraus eine Sterblichkeitstafel bilden. Man beginnt mit einem bestimmten Alter, z. B. mit dem Alter von x Jahren, setzt die Anzahl der Lebenden dieses Alters einer höheren dekadischen Einheit gleich, angenommen $l_x = 100.000$ und berechnet dann die Anzahl der Lebenden des nächst höheren Alters l_{x+1} mit Hilfe der Gleichung

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Man findet also

$$l_{x+1} = l_x p_x,$$

ebenso bekommt man

$$l_{x+2} = l_{x+1} p_{x+1}$$

oder

$$l_{x+2} = l_x p_x p_{x+1},$$

ferner

$$l_{x+3} = l_x p_x p_{x+1} p_{x+2}$$

und

$$l_\omega = l_x p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots\cdots p_{\omega-1}.$$

Der Quotient $\frac{d_x}{l_x}$ gibt die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person, welche das Alter von x Jahren bereits erreicht hat, vor Erreichung des Alters von $(x+1)$ Jahren stirbt. Dieser Bruch heißt die *Sterbenswahrscheinlichkeit* und wird mit q_x bezeichnet.

Wir haben also

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

Nun ist aber

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

oder

$$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x},$$

daher ist, wenn man $\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x$ setzt,

$$p_x + q_x = 1.$$

Die Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit ergänzen sich zu einer Einheit.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine $x$jährige Person das Alter von $(x+n)$ Jahren erreichen wird, ist durch den Bruch $\frac{l_{x+n}}{l_x}$ bestimmt und wird mit ${}_n p_x$ bezeichnet, so daß

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

ist. Ihre entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß eine $x$jährige Person das $(x+n)$te Lebensjahr *nicht* erreichen, mithin im Laufe der nächsten n Jahre sterben wird, hat, wenn man sie mit ${}_n q_x$ (lies: Strich $n\,q\,x$) bezeichnet, den Wert

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

oder

$${}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine $x$jährige Person nach m Jahren, nachdem sie das Alter von $(x+m)$ Jahren bereits erreicht hat, vor Erreichung des Alters von $(x+m+1)$ Jahren stirbt, ist, wenn man sie mit ${}_{m|}q_x$ (lies: m Strich $q\,x$) bezeichnet,

$${}_{m|}q_x = \frac{d_{x+m}}{l_x}$$

oder

$${}_{m|}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x}$$

oder auch durch Lebenswahrscheinlichkeiten ausgedrückt,

$${}_{m|}q_x = {}_m p_x - {}_{m+1} p_x.$$

§ 35. *Mittlere und wahrscheinliche Lebensdauer.*

Um die *mittlere Lebensdauer* oder die *Lebenserwartung*, welche die durchschnittliche Anzahl der Jahre angibt, die eine $x$jährige Person noch durchlebt, zu bestimmen, nimmt man an, daß die Sterbefälle während eines Jahres sich gleichmäßig über dasselbe verteilen. Es durchleben daher die d_x Gestorbenen des ersten Jahres gemeinschaftlich $\frac{d_x}{2}$ Jahre, die d_{x+1} Gestorbenen des zweiten Jahres außer der d_{x+1} Jahren im ersten Jahre noch $\frac{d_{x+1}}{2}$ Jahre im zweiten Jahre, mithin $\frac{3\,d_{x+1}}{2}$ Jahre, ebenso die d_{x+2} Gestorbenen des dritten Jahres $2\,d_{x+2} + \frac{d_{x+2}}{2} = \frac{5\,d_{x+2}}{2}$ Jahre usw.

Folglich ist die von den $d_x + d_{x+1} + \cdots\cdots + d_\omega = l_x$ Personen gemeinschaftlich durchlebte Zeit, die wir mit T_x bezeichnen,

$$T_x = \frac{d_x}{2} + \frac{3\,d_{x+1}}{2} + \frac{5\,d_{x+2}}{2} + \cdots\cdots + \frac{[2(\omega-x)+1]\,d_\omega}{2}$$

oder

$$\begin{aligned} T_x = \frac{d_x}{2} + \frac{d_{x+1}}{2} &+ \frac{d_{x+2}}{2} + \cdots\cdots + \frac{d_\omega}{2} \\ + d_{x+1} &+ d_{x+2} + \cdots\cdots + d_\omega \\ &+ d_{x+2} + \cdots\cdots + d_\omega \\ & \qquad d_{\omega-1} + d_\omega \\ & \qquad\qquad\; d_\omega . \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$d_x + d_{x+1} + \cdots\cdots + d_\omega = l_x,$$

ebenso

$$d_{x+1} + \cdots\cdots + d_\omega = l_{x+1},$$

$$d_\omega = l_\omega .$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung für T_x, so erhält man

$$T_x = \frac{1}{2}\,l_x + l_{x+1} + \cdots\cdots + l_\omega .$$

Dividiert man die von den l_x Personen gemeinschaftlich durchlebte Zeit T_x durch die Anzahl dieser Personen, so erhält man für die *mittlere Lebensdauer* einer $x$jährigen Person, die wir mit $\mathring{e}_x$ bezeichnen, den Wert

$$\mathring{e}_x = \frac{T_x}{l_x}$$

oder

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots + l_\omega}{l_x}.$$

Der Bruch $\frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots + l_\omega}{l_x}$ wird die *abgekürzte Lebenserwartung* genannt und mit e_x bezeichnet.

Mithin ist die *mittlere Lebensdauer* oder die *volle Lebenserwartung* einer $x$jährigen Person

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{2} + e_x .$$

Um eine Beziehung zwischen der Lebenswahrscheinlichkeit p_x und der Lebenserwartung e_x aufstellen zu können, geht man von der Gleichung

$$e_{x+1} = \frac{l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots\cdots + l_\omega}{l_{x+1}}$$

aus und bildet

$$1 + e_{x+1} = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots + l_\omega}{l_{x+1}}.$$

Multipliziert man die rechte Seite dieser Gleichung mit $\frac{l_x}{l_x}$, so erhält man

$$1 + e_{x+1} = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots + l_\omega}{l_x} \cdot \frac{l_x}{l_{x+1}}$$

oder

$$1 + e_{x+1} = e_x \cdot \frac{1}{p_x},$$

woraus sich

$$p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}}$$

ergibt.

Unter der *wahrscheinlichen Lebensdauer* einer $x$jährigen Person versteht man jene Zeit, nach welcher die Anzahl l_x $x$jähriger Personen durch Ableben sich auf die Hälfte reduziert. Wäre die wahrscheinliche Lebensdauer gleich n, so hat man die Gleichung

$$l_{x+n} = \frac{1}{2}\,l_x .$$

Um n zu berechnen, geht man in der Sterbetafel von l_x aus und schreitet darin bis zu den Zahlen l_{x+n} und l_{x+n+1}, zwischen welchen die Zahl $\frac{1}{2}\,l_x$ liegt. Die Zahl n wird im allgemeinen keine ganze, sondern eine gemischte Zahl sein, deren Wert man annähernd durch Interpolation leicht finden kann.

Wenn z. B. nach der wahrscheinlichen Lebensdauer einer 40jährigen Person gefragt wird, so hat man nach Tafel VIII

$$l_{40} = 93\,811 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\,l_{40} = 46\,905{\cdot}5 .$$

Nun liegt die Zahl 46905·5 zwischen den beiden zu 72 und 73 Jahren gehörigen Zahlen

$$l_{72} = 47\,491 \quad \text{und} \quad l_{73} = 44\,603 .$$

Unter der Annahme, daß die bei den l_{72} Personen im Laufe des 72. Lebensjahres eintretenden Todesfälle sich auf das Jahr gleichmäßig verteilen, würde eine jede der

$$l_{72} - \frac{1}{2}\,l_{40} = 585{\cdot}5$$

Personen von dem 73. Lebensjahre noch den Bruchteil

$$\frac{l_{72} - \frac{1}{2} l_{30}}{l_{72} - l_{73}} = \frac{585\cdot5}{2888} = 0\cdot20$$

durchleben. Mithin ist die wahrscheinliche Lebensdauer einer 40jährigen Person 32·20 Jahre.

§ 36. *Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeiten von verbundenen Leben.* Zwei Personen A und B, die zusammen ein Paar bilden, welches wir der Einfachheit halber als Ehepaar ansehen wollen — es kann aber auch das Paar aus Vater und Sohn oder aus Sohn und Mutter oder aus zwei Kompagnons bestehen — haben das Alter von x beziehungsweise von y Jahren. Die Anzahl der Paare, die aus $x$jährigen Männern und aus $y$jährigen Frauen bestehen, ist $l_x l_y$, welches Produkt man mit $l_{x:y}$ bezeichnet.

Von diesen $l_x l_y = l_{x:y}$ Ehepaaren werden nach Ablauf eines Jahres $(l_x - l_{x+1}) l_{y+1}$ Witwen, $(l_y - l_{y+1}) l_{x+1}$ Witwer und $(l_x - l_{x+1})(l_y - l_{y+1})$ Paare sterben gänzlich aus.

Mithin ist die Anzahl der vollständigen Paare, die nach einem Jahre noch leben

$$l_x l_y - (l_x - l_{x+1}) l_{y+1} - (l_y - l_{y+1}) l_{x+1} - (l_x - l_{x+1})(l_y - l_{y+1}) =$$
$$= l_{x+1} l_{y+1} = l_{x+1:y+1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Paar nach einem Jahre noch lebt, ist gleich

$$\frac{l_{x+1} l_{y+1}}{l_x l_y}.$$

Man bezeichnet diese Wahrscheinlichkeit mit p_{xy}, so daß

$$p_{xy} = \frac{l_{x+1} l_{y+1}}{l_x l_y}$$

oder

$$p_{xy} = p_x p_y$$

ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Paar nach n Jahren am Leben sein wird, findet man durch Multiplikation der einfachen Wahrscheinlichkeiten ${}_np_x$ und ${}_np_y$ und bezeichnet sie durch ${}_np_{xy}$.

Denn es ist

$${}_np_{xy} = \frac{l_{x+n:y+n}}{l_{x:y}}$$

oder

$${}_np_{xy} = \frac{l_{x+n} l_{y+n}}{l_x l_y},$$

woraus folgt, daß ${}_np_{xy} = {}_np_x \, {}_np_y$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Paar nach Ablauf von n Jahren durch den Tod einer Person aufgelöst wird, hat, wenn wir sie mit ${}_n q_{xy}$ bezeichnen, den Wert

$${}_n q_{xy} = \frac{l_{x+n} l_{y+n} - l_{x+n+1} l_{y+n+1}}{l_x l_y}$$

oder

$${}_n q_{xy} = {}_np_{xy} - {}_{n+1}p_{xy}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ${}_{|n}q_{xy}$, daß nicht beide das Paar bildenden Personen nach n Jahren leben werden, hat als die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit zu ${}_np_{xy}$ den Wert

$${}_nq_{xy} = 1 - {}_np_{xy}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren *beide* Personen gestorben sind, ist, wenn man dieselbe mit ${}_{|n}q_{\overline{xy}}$ (lies: Strich n q, xy überstrichen) bezeichnet,

$${}_{|n}q_{\overline{xy}} = (1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y)$$

oder

$${}_{|n}q_{\overline{xy}} = {}_{|n}q_x \cdot {}_{|n}q_y.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren *wenigstens eine* von den beiden Personen am Leben sein wird und die man mit ${}_np_{\overline{xy}}$ bezeichnet, hat als die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit zu ${}_nq_{\overline{xy}}$ den Wert

$${}_np_{\overline{xy}} = 1 - (1 - {}_np_x)(1 - {}_np_y)$$

oder

$${}_np_{\overline{xy}} = {}_np_x + {}_np_y - {}_np_{xy}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach n Jahren von den beiden Personen *nur eine* am Leben sein wird, ist, wenn man dieselbe mit ${}_np_{\overline{xy}}^{\,1}$ (lies: np, xy unter 1 überstrichen) bezeichnet,

$${}_np_{\overline{xy}}^{\,1} = {}_np_x(1 - {}_np_y) + {}_np_x(1 - {}_np_y)$$

oder

$${}_np_{\overline{xy}}^{\,1} = {}_np_x + {}_np_y - 2\,{}_np_{xy}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ${}_np_{x|y}$ (lies: np, x Strich y), daß eine $y$jährige Frau nach n Jahren Witwe wird, ist,

$${}_np_{x|y} = (1 - {}_np_x)\,{}_np_y$$

oder

$${}_np_{x|y} = {}_np_y - {}_np_{xy}$$

oder auch

$${}_np_{x|y} = {}_{|n}q_x \cdot {}_np_y.$$

Wie man sieht, kann man die meisten Wahrscheinlichkeiten für verbundene Leben dadurch finden, daß man dabei das Additions- und

Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für einfache Leben anwendet.

§ 37. *Sterblichkeitstafeln.*

In der Lebensversicherung werden für verschiedene Versicherungskombinationen hauptsächlich 2 Gattungen von Sterblichkeitstafeln verwendet, und zwar die *Rentenerslerbetafeln* und die *Todesfalltafeln.*

Die ersteren dienen zur Berechnung der Versicherungen, wenn der Versicherte einen bestimmten Termin erlebt, wie bei Erlebens- und Leibrentenversicherungen, die anderen werden für den Fall des Ablebens des Versicherten benützt. Sterbetafeln, welche aus den Beobachtungen von auf den Todesfall versicherten Personen abgeleitet worden sind, dürfen nicht auf Rentenversicherungen angewendet werden. Personen, welche sich im Kampfe ums Dasein abmühen und durch eine Lebensversicherung ihre Angehörigen für den Fall eines frühzeitigen Ablebens sichern, weisen erfahrungsgemäß eine viel größere Sterblichkeit auf als die Rentenempfänger, die ein bequemeres Leben führen können. Höhere Sterbenswahrscheinlichkeiten bedingen aber eine höhere einmalige und jährliche Nettoprämie, dagegen geringere Rentenwerte.

Beim Rentengeschäft werden vorsichtshalber für die beiden Geschlechter zwei verschiedene Tafeln benützt, da erfahrungsgemäß die Sterblichkeit der männlichen Rentner während einer bestimmten Altersperiode wesentlich höher ist als die der weiblichen.

Außerdem werden bei Versicherungen auf kleine Beträge, die von den wirtschaftlich schwachen Elementen abgeschlossen werden, bei den sogenannten *Volksversicherungen,* Sterblichkeitstafeln aus den Beobachtungen einer ganzen Bevölkerung verwendet.

Im Anhange findet man:

1. Die Sterbewahrscheinlichkeiten (Tabelle VII), mittelst welcher die betreffenden, jetzt gebräuchlichsten Sterbetafeln berechnet sind.

2. Die im Jahre 1891 veröffentlichte *„Deutsche Renten-Sterbetafel für Männer und Frauen"* (Tabelle VIII), welche auf einem Beobachtungsmaterial von 24 deutschen, 11 österreichischen und 3 schweizerischen Lebens-, beziehungsweise Rentenversicherungsgesellschaften beruht und mit 3½ Prozent berechnet ist.

3. Die vom Institute of Actuaries in London und von der Fakultät of Aktuaris in Scotland im Jahre 1903 veröffentlichte nnd mit 3½ Prozent berechnete *„Rentner-Sterbetafel der 43 britischen Gesellschaften"* O^{am}, O^{af} und O^{amf} (Offices male — female — annuitant's Tables) für einfache und verbundene Leben (Tabelle IX).

4. Die im Jahre 1872 erschienene, von dem Institut der englischen Aktuare unter Mitwirkung der schottischen Aktuarenfakultät auf Grundlage der Erfahrungen von 10 englischen und 10 schottischen Gesellschaften ausgeführte und mit 3 Prozent berechnete *„Tafel der 20 englischen Gesellschaften"* H^M (Healthy male Lives) (Tabelle X).

5. Die im Jahre 1883 im Auftrage des Kollegiums für Lebensversicherungswissenschaft zu Berlin veröffentlichte, aus den Erfahrungen von 23 deutschen Gesellschaften — darunter einer österreichischen — abgeleitete und mit 3½ Prozent berechnete *„Sterblichkeitstafel der 23 deutschen Gesellschaften"* *M.* und *W. I.* (Normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung.) (Tabelle XI.)

6. Die aus den Erfahrungen des Zeitraumes 1863—1893 der 60 britischen Gesellschaften, anschließend an die Beobachtungsperiode für die Tafeln der 20 englischen Gesellschaften, abgeleitete und vom Institute of Actuaries in London und von der Fakultät of Actuaries in Scotland im Jahre 1903 veröffentlichte mit 3½ Prozent berechnete *„Sterblichkeitstafel der 60 britischen Gesellschaften"* O^M (Offices mole Lives) (Tabelle XII).

7. Die im Jahre 1909 von der mathematisch-statischen Vereinigung des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten veröffentlichte, aus den Beobachtungen an österreichischen und ungarischen bei 28 Anstalten versicherten Personen gewonnene und mit 3½ Prozent berechnete *„Österreichisch-ungarische Sterblichkeitstafel"* AH^M (Austria-Hungaria Männer) (Tabelle XIII).

Ferner findet man im Anhange die aus der Invaliditätstafel für das Nichtfahrpersonal, aus der Sterbetafel der Invaliden (Heft I der Statistik pro 1884, beziehungsweise Heft II der Statistik pro 1885 des Vereines deutscher Eisenbahnverwaltungen), aus der preußischen Volkssterbetafel für Frauen 1891—1900 und aus den Familienstandsverhältnissen der Privatbeamtenstatistik 1896 entnommenen und mit 4 Prozent berechneten *Grundzahlen* zur Ermittlung der Prämien und Reserven für die Versicherung der *Invaliditäts- und Altersrenten,* der *Witwen- und Waisenrenten* und für die Versicherung der *einmaligen Abfertigungen.* (Tabelle XIV, XV und XVI.)

III. ABSCHNITT.

Prämienberechnungen für einfache Leben.

1. Einmalprämien für Erlebens- und Rentenversicherungen.

§ 38. *Definitionen. Erlebensversicherung.*

1. Unter *Versicherungssumme* einer Lebensversicherung versteht man jene Geldsumme, die beim Eintreffen des versicherten Ereignisses fällig wird, mag sie einmal oder öfters gezahlt werden. Der *Barwert* dieser fälligen Geldsumme oder der Barwert dieser Anwartschaft ist die *diskontierte mathematische Erwartung* und gleich dem Produkte aus der Geldsumme, der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des versicherten Ereignisses und dem entsprechenden Abzinsungsfaktor.

Versicherungsdauer ist die Zeit, die vom Beginne der Versicherung bis zum Zeitpunkte der Fälligkeit verflossen ist.

Die Beiträge, welche die Versicherten einmal oder in periodisch wiederkehrenden Terminen einzahlen, heißen *Prämien*, und zwar *Einmalprämien* oder *Jahresprämien*.

Jener Teil der Prämie, welcher die Nettoausgaben deckt, heißt *Nettoprämie*.

Die Prämie, die der Versicherte zahlt, heißt *Brutto- oder Tarifprämie*.

Unter *Zuschlag*, sogenannten Verwaltungs- oder Regiezuschlag, versteht man die Differenz zwischen der Bruttoprämie und der Nettoprämie. Er dient zur Deckung der Unkosten, Gewährung von Dividenden, Anlage von Sicherheits- und Extrafonds und dergleichen. Der Einfachheit halber werden wir bei allen Ermittlungen der Prämien als Versicherungssumme eine Kapitalseinheit annehmen.

2. Bei der *Erlebensversicherung* bedingt sich eine $x$jährige Person für den Fall, als sie das höhere Alter von $(x+m)$ Jahren erreicht, die Zahlung einer bestimmten Summe. Stirbt die betreffende Person innerhalb der m Jahre, so erhalten deren Erben nichts ausbezahlt.

Die *einmalige Nettoprämie* für diese Versicherung wird, falls die Versicherungssumme eine Kapitalseinheit beträgt, mit ${}_mE_x$ (Endowment) oder mit $A_{x\overline{m}|}^{\;1}$ (lies: $A\,x$, m unter 1 in rechtwinklige Klammer gesetzt) bezeichnet.

Die betreffende $x$jährige Person befindet sich im Besitze der Anwartschaft einer nach m Jahren fälligen Kapitalseinheit. Die Wahrscheinlichkeit, daß die $x$jährige Person nach m Jahren noch lebt und daher mit dem erreichten $(x+m)$ Lebensjahre in den Besitz der Kapitalseinheit gelangt, ist auch gleich der Anwartschaft auf diese Kapitalseinheit.

Der Barwert dieser Anwartschaft, der gleich

$${}_mp_x\,v^m \text{ ist,}$$

wobei $v=\frac{1}{r}=\frac{1}{1+i}$ den Abzinsungsfaktor vorstellt, muß der Einmalprämie dieser Versicherungsart gleich sein.

Es ist also

$${}_mE_x={}_mp_x\,v^m.$$

Zu dieser Gleichung kann man auch durch eine andere Schlußfolgerung gelangen, indem man sagt: von den l_x Personen, die in einer Sterbetafel verzeichnet sind, erreichen nach m Jahren l_{x+m} Personen das $(x+m)$te Lebensjahr; würden sich alle l_x Personen versichert haben, so hätte die Versicherungsgesellschaft an jede der nach m Jahren noch lebenden Personen den Betrag von einer Kapitalseinheit zu bezahlen. Der Barwert dieser Leistung ist $l_{x+m}\,.\,v^m$. Der auf eine Person entfallende Anteil ist somit

$$\frac{l_{x+m}\,.\,v^m}{l_x},$$

welcher auch der Einmalprämie ${}_mE_x$ gleich sein muß.

Es ist mithin

$${}_mE_x=\frac{l_{x+m}\,v^m}{l_x}$$

oder auch, wie oben,

$${}_mE_x={}_mp_x\,v^m.$$

Multiplizieren wir die rechte Seite der Gleichung

$${}_mE_x=\frac{l_{x+m}\,v^m}{l_x}$$

mit $\frac{v^x}{v^x}$, so erhält man

$${}_mE_x=\frac{l_{x+m}\,v^{x+m}}{l_x\,v^x}.$$

Man bezeichnet das Produkt $l_x v^x$ mit D_x ebenso $l_{x+m} v^{x+m}$ mit D_{x+m} und nennt diese Produkte *„die diskontierten Zahlen der Lebenden“*.

Daher ist

$${}_mE_x = \frac{\mathrm{D}_{x+m}}{\mathrm{D}_x}.$$

Beispiel.

Wie groß ist die einmalige Nettoprämie, die eine 30jährige Person für eine Erlebensversicherung auf das 55. Lebensjahr im Betrage von K 5.000·— zu zahlen hätte?

Nach Tabelle VIII ist, da $x = 30$ und $m = 25$ ist,

$$\mathrm{D}_{55} = 12\,265, \qquad \mathrm{D}_{30} = 34\,982$$

und

$${}_{25}E_{30} = \frac{12\,265}{34\,982} = 0{\cdot}350\,609\,.$$

Der Versicherte müßte als einmalige Nettoprämie den Betrag von K 1.753·05 zahlen.

§ 39. *Leibrenten. Sofort beginnende, lebenslängliche Leibrenten.*

Unter einer Leibrente versteht man eine periodisch wiederkehrende Zahlung eines bestimmten Betrages, deren Dauer von dem Leben des Rentenempfängers derart abhängig ist, daß die Rentenzahlung mit dem Tode des Versicherten aufhört.

Die Leibrenten werden in 4 Gruppen eingeteilt und zwar:

1. In sofort beginnende, lebenslängliche Leibrenten,
2. in aufgeschobene, lebenslängliche Leibrenten,
3. in sofort beginnende, temporäre oder kurze Leibrenten, und
4. in aufgeschobene, temporäre Leibrenten.

Findet die Zahlung der Rente am Anfange eines jeden Jahres statt, so heißt die Rente eine *vorschüssige* oder *pränumerando zahlbare* oder kurz *eine Pränumerando-Leibrente*, im Gegensatze zu der *nachschüssigen* oder *postnumerando zahlbaren* oder kurz *Postnumerando-Leibrente*, die immer am Schlusse eines jeden Jahres gezahlt wird.

Je nachdem die Renten in konstanten oder in veränderlichen Beträgen ausbezahlt werden, unterscheidet man *konstante* und *veränderliche Leibrenten.*

Die sofort beginnende *Pränumerando-Leibrente*, deren erste Zahlung sofort, die zweite, dritte, usw. jedesmal mit dem Betrage von einer Kapitalseinheit nur dann stattfindet, wenn die $x$jährige versicherte Person nach einem, zwei usf. Jahren am Leben ist, kann als eine Summe von Erlebensversicherungen aufgefaßt werden, die in den entsprechenden Zeitperioden ausgezahlt werden. Ist ω das höchste Alter in der Sterbe-

tafel, das vom Versicherten erreicht werden kann und bezeichnet man diese Leibrente mit a_x, so ist der Wert der Rente offenbar

$$\mathrm{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots\cdots + {}_{(\omega-x)}E_x\,.$$

Nach Substituierung der entsprechenden Werte von E_x erhält man

$$\mathrm{a}_x = 1 + \frac{\mathrm{D}_{x+1}}{\mathrm{D}_x} + \frac{\mathrm{D}_{x+2}}{\mathrm{D}_x} + \cdots\cdots + \frac{\mathrm{D}_\omega}{\mathrm{D}_x}$$

oder

$$\mathrm{a}_x = \frac{\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_{x+1} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_\omega}{\mathrm{D}_x}.$$

Wird nun *die Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden*

$$\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_{x+1} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_\omega = \Sigma \mathrm{D}_x = \mathbb{N}_x$$

gesetzt, so folgt

$$\mathrm{a}_x = \frac{\Sigma \mathrm{D}_x}{\mathrm{D}_x}$$

oder

$$\mathrm{a}_x = \frac{\mathbb{N}_x}{\mathrm{D}_x}.$$

Soll die Rente eine *Postunmerando-Leibrente* sein, so fällt bloß die sofortige Zahlung von einer Kapitalseinheit weg, während die übrigen Zahlungen wie bei der Pränumerando-Rente nach einem, zwei usf. Jahren stattfinden und man erhält, wenn man die Einmal-Prämie dieser Rente für eine $x$jährige Person mit a_x bezeichnet,

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots\cdots + {}_{(\omega-x)}E_x$$

oder

$$a_x = \frac{\mathrm{D}_{x+1} + \mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots \mathrm{D}_\omega}{\mathrm{D}_x}.$$

Nun ist aber $\mathrm{D}_{x+1} + \mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_\omega = \Sigma \mathrm{D}_{x+1} = \mathbb{N}_{x+1}$,

daher bekommt man für diese Rente den Wert

$$a_x = \frac{\Sigma \mathrm{D}_{x+1}}{\mathrm{D}_x}$$

oder

$$a_x = \frac{\mathbb{N}_{x+1}}{\mathrm{D}_x}.$$

Wenn man in der Gleichung

$$\mathrm{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots\cdots + {}_{(\omega-x)}E_x$$

für ${}_1E_x + {}_2E_x + \cdots\cdots + {}_{(\omega-x)}E_x$ den Wert a_x einsetzt, so erhält man

$$\mathrm{a}_x = 1 + a_x$$

und daraus

$$a_x = \mathrm{a}_x - 1$$

d. h. die *Postnumerando-Leibrente ist um eine Einheit kleiner als die pränumerando zahlbare Leibrente.*

Die Pränumerando-Leibrente hat eigentlich nur theoretischen Wert, denn der Versicherte wird doch nicht beim Abschlusse des Versicherungsvertrages auch eine Auszahlung sich anweisen lassen. Sie bildet vielmehr, wie wir später sehen werden, die Prämie, welche die Gesellschaft von dem Versicherten fordert.

Die in diesen und in den folgenden Gleichungen und Formeln verwendeten Zeichen $\mathbb{N}$ und D sind die Anfangsbuchstaben der Worte *Numerator* (Zähler) und *Denominator* (Nenner) und wurden zuerst von *Griffit Davies* im Jahre 1825 gebraucht. Die diskontierten Zahlen, die von so großer Bedeutung für die Entwicklung der Lebensversicherungsmathematik geworden sind, wurden von *Johann. Nik. Tetens* im Jahre 1785 erfunden.

Beispiel.

Eine 50jährige Frau macht eine Erbschaft von K 200.000·— und will dafür eine nachschüssige lebenslängliche Leibrente kaufen. Wie groß wird die Rente sein, wenn die Rentenanstalt 10 Prozent der einmaligen Nettoprämie als Regiezuschlag rechnet?

Benützt man die Gleichung

$$a_x = \mathrm{a}_x - 1 \text{ nnd die Tabelle IX } b,$$

so erhält man

$$a_{50} = 14{\cdot}349,$$

d. h. die 50jährige Frau müßte den Nettobetrag von K 14·349 zahlen, um eine Postnnmerando-Leibrente von K 1·— zu erhalten. Da aber die Anstalt 10 Prozent Regiezuschlag verlangt, so muß sie für die Rente von K 1·— den Betrag von K 14·349 plus 10 Prozent davon, d. i. den Betrag von K 15·7839 an Bruttoprämie entrichten. Die Höhe der gesuchten Rente erhält man nun aus der Proportion

$$15{\cdot}7839 : 200000 = 1 : x.$$

Die Rente beträgt mithin, wenn man diese Proportion nach x auflöst, K 12.671·14.

§ 40. *Aufgeschobene, lebenslängliche Leibrenten* (Altersrenten).

Eine Leibrente, deren Beginn auf einen späteren Zeitpunkt verlegt ist, heißt eine *aufgeschobene Leibrente.*

Sie kann eine *pränumerando* oder *postnumerando zahlbare Leibrentenversicherung* sein, je nachdem die $x$jährige Person zum erstenmal nach m Jahren oder nach Ablauf der Aufschubzeit von m Jahren am Schlusse des nächsten Jahres, d. i. des $(m+1)$ten Jahres in den Bezug der Rente tritt.

Im ersten Falle hat dieselbe, wenn man für den Rentenbetrag von

einer Kapitalseinheit die einmalige Nettoprämie mit ${}_{m}\mathrm{a}_x$ bezeichnet, als Summe der Erlebensversicherungen

$${}_{m}E_x, \quad {}_{m+1}E_x, \quad \ldots\ldots \quad {}_{(\omega-x)}E_x$$

den Wert

$${}_{m}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+m} + D_{x+m+1} + \cdots\cdots + D_\omega}{D_x}$$

oder

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = \frac{\Sigma D_{x+m}}{D_x}$$

oder auch

$${}_{m}\mathrm{a}_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x}.$$

Im zweiten Falle, nämlich als aufgeschobene postnumerando zahlbare Leibrente von einer Kapitalseinheit hat sie, wenn man die einmalige Nettoprämie dieser Rente mit ${}_{m|}a_x$ bezeichnet, als Summe der Erlebensversicherungen

$${}_{m+1}E_x, \quad {}_{m+2}E_x, \quad \ldots\ldots \quad (\omega - x)\,E_x$$

den Wert

$${}_{m}a_x = \frac{D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \cdots\cdots + D_\omega}{D_x}$$

oder

$${}_{m}a_x = \frac{\Sigma D_{x+m+1}}{D_x}$$

oder auch

$${}_{m|}a_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m+1}}{D_x}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner der rechten Seite der Gleichungen

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x} \quad \text{nnd} \quad {}_{m|}a_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m+1}}{D_x}$$

mit D_{x+m} beziehungsweise mit D_{x+m+1}, so erhält man

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_{x+m}} \quad \text{nnd} \quad {}_{m|}a_x = \frac{D_{x+m+1}}{D_x} \cdot \frac{\mathbb{N}_{x+m+1}}{D_{x+m+1}}$$

oder

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot \mathrm{a}_{x+m} \quad \text{und} \quad {}_{m|}a_x = \frac{D_{x+m+1}}{D_x} \cdot \mathrm{a}_{x+m+1}$$

Beispiel.

Eine 25jährige Person will mit dem erreichten 60. Lebensjahre eine lebenslängliche Leibrente von K 3.000·— erhalten. Wie groß ist die einmalige Nettoprämie, welche die betreffende Person dafür zu zahlen hätte?

Hier ist $x = 25$ und $m = 60 - 25 = 35$.
Mithin ist

$$_{35|}a_{25} = \frac{N_{60}}{D_{25}}$$

oder, wenn man darin die entsprechenden Werte für N_{60} und D_{25} aus der Tabelle VIII einsetzt,

$$_{35|}a_{25} = \frac{111786{\cdot}3}{42315} = 2{\cdot}64176.$$

Die betreffende Person müßte für die verlangte Rente den einmaligen Nettobetrag von K 2·64176 $\times$ 3000 d. i. von K 7.925·28 zahlen.

§ 41. *Sofort beginnende, temporäre oder kurze Leibrenten.*

Eine Leibrente, die höchstens $n$mal und nur so lange die versicherte $x$jährige Person lebt, zur Auszahlung gelangt, heißt eine *kurze* oder *temporäre Leibrente.* Sie kann eine *pränumerando* oder *postnumerando zahlbare Leibrente* sein, je nachdem die erste Rentenzahlung sofort oder erst nach Ablauf eines Jahres beginnt.

Die für die Renteneinheit mit $a_{x\overline{n|}}$ oder mit $_{|n}a_x$ bezeichnete einmalige Nettoprämie einer kurzen Pränumerando-Leibrente ist gleich der Summe der Erlebensversicherungen

$$_0E_x, \quad _1E_x, \quad _2E_x, \quad \ldots\ldots \quad _{n-1}E_x$$

und hat mithin den Wert

$$_{|n}a_x = \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+n-1}}{D_x}.$$

Nun ist aber der Zähler, der eine Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden darstellt,

$$D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+n-1} =$$
$$= (D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+n-1} + D_{x+n} + D_{x+n+1} + \cdots\cdots + D_\omega) -$$
$$- (D_{x+n} + D_{x+n+1} + \cdots\cdots + D_\omega)$$

oder

$$D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+n-1} = N_x - N_{x+n}.$$

Substituiert man diesen Wert des Zählers in die Gleichung für $_{|n}a_x$, so erhält man

$$_{|n}a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$_{|n}a_x = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

oder

$$_{|n}a_x = a_x - {}_{n|}a_x,$$

so drückt sie aus, daß die kurze Leibrente gleich ist der Differenz aus der sofort beginnenden und der um ihre Dauer aufgeschobenen lebenslänglichen Leibrente.

Ist die kurze Leibrente eine postnumerando zahlbare Leibrente, so hat die einmalige Nettoprämie für die Renteneinheit, die man mit $a_{x\overline{n|}}$ oder mit $_{|n}a_x$ bezeichnet, als Summe der Erlebensversicherungen

$$_1E_x, \quad _2E_x, \quad \ldots\ldots \quad _nE_x$$

den Wert

$$_{|n}a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots + D_{x+n}}{D_x}$$

oder, wenn man für den Zähler analog dem früheren den Wert

$$N_{x+1} - N_{x+n+1}$$

einsetzt,

$$_{|n}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

oder auch

$$_{|n}a_x = a_x - {}_{n|}a_x.$$

Beispiel.

Ein Vater will seinem 25jährigen Sohne eine durch 10 Jahre dauernde Postnumerando-Leibrente von K 2.000·— kaufen. Wieviel hat er dafür an Nettoprämie zu zahlen?

Für die Renteneinheit ist die Nettoprämie

$$_{10}a_{25} = \frac{N_{26} - N_{36}}{D_{25}}$$

und nach Tafel VIII

$$_{10}a_{25} = \frac{886314 - 541191}{42315} = 8{\cdot}15\,604$$

Der Vater hat an Nettoprämie den Betrag von K 16.312·08 zu zahlen.

§ 42. *Aufgeschobene, kurze Leibrenten.*

Eine Leibrente, die um m Jahre aufgeschoben höchstens $n$mal, vorausgesetzt, daß die versicherte $x$jährige Person so lange lebt, zur Auszahlung gelangt, heißt eine *aufgeschobene kurze oder temporäre Leibrente.* Dieselbe kann eine pränumerando oder postnumerando zahlbare Rente sein, je nachdem die Rentenzahlung unmittelbar oder ein Jahr später nach der Aufschubzeit beginnt.

Die einmalige Nettoprämie einer *aufgeschobenen kurzen Pränumerando-Leibrente* von der Höhe einer Kapitalseinheit hat als Summe der Erlebensversicherungen

$$_mE_x, \quad _{m+1}E_x, \quad \ldots\ldots, \quad _{m+n-1}E_x$$

den Wert, wenn wir denselben mit ${}_{m|n}\mathrm{a}_x$ bezeichnen,

$$ {}_{m|n}\mathrm{a}_x = \frac{\mathrm{D}_{x+m} + \mathrm{D}_{x+m+1} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_{x+m+n-1}}{\mathrm{D}_x} $$

oder

$$ {}_{m|n}\mathrm{a}_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m} - \mathbb{N}_{x+m+n}}{\mathrm{D}_x}. $$

Für eine *aufgeschobene, kurze Postnumerando-Leibrente*, die mit dem Betrage von einer Kapitalseinheit zur Auszahlung gelangt, ist der Wert der einmaligen Nettoprämie, die man mit ${}_{m|n}a_x$ bezeichnet, gleich der Summe der Erlebensversicherungen

$$ {}_{m+1}E_x, \quad {}_{m+2}E_x, \quad \ldots\ldots, \quad {}_{m+n}E_x. $$

Mithin ist

$$ {}_{m|n}a_x = \frac{\mathrm{D}_{x+m+1} + \mathrm{D}_{x+m+2} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_{x+m+n}}{\mathrm{D}_x} $$

oder

$$ {}_{m|n}a_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m+1} - \mathbb{N}_{x+m+n+1}}{\mathrm{D}_x}. $$

Sowohl für die pränumerando als auch für die postnumerando zahlbare aufgeschobene kurze Leibrente gilt die Beziehung

$$ {}_{m|n}\mathrm{a}_x = {}_{m|}\mathrm{a}_x - {}_{m+n|}\mathrm{a}_x $$

$$ {}_{m|n}a_x = {}_{m|}a_x - {}_{m+n|}a_x $$

Beispiel.

Eine 35jährige Person kauft eine mit dem 65. Lebensjahre beginnende und durch 20 Jahre dauernde Leibrente von K 4.000·—. Wie groß wäre die einmalige Nettoprämie, die die 35jährige Person dafür zu zahlen hätte?

Für die Renteneinheit wäre die Nettoprämie

$$ {}_{30|20}\mathrm{a}_{35} = \frac{\mathbb{N}_{65} - \mathbb{N}_{85}}{\mathrm{D}_{35}} $$

oder, wenn man darin für $\mathbb{N}_{65}$, $\mathbb{N}_{85}$ und D_{35} die aus der Tafel VIII entnommenen Werte einsetzt,

$$ {}_{30|20}\mathrm{a}_{35} = \frac{69772{\cdot}9 - 2300{\cdot}67}{28849} = 2{\cdot}33\,881 $$

und für die K 4.000·— Rente beträgt die Nettoprämie K 9.355·24.

§ 43. *Veränderliche Leibrenten.*

Man ging bisher bei der Berechnung der Rentenwerte von der Voraussetzung aus, daß die Rente während ihrer ganzen Bezugsdauer konstant bleibt Wird die Rente jedoch mit einem von Jahr zu Jahr

steigenden oder fallenden Betrage ausbezahlt, so haben wir mit einer *veränderlichen Rente* zu tun, welche als selbständige Versicherung eine sehr beschränkte Anwendung findet und nur zur Berechnung gewisser Versicherungskombinationen dient.

1. Nehmen wir an, eine $x$jährige Person würde sofort den Betrag k, nach einem Jahre den Betrag $k \pm \delta$, nach zwei Jahren den Betrag $k \pm 2\,\delta$ usf., solange die versicherte Person am Leben ist, ausbezahlt erhalten, so bezeichnen wir die einmalige Nettoprämie dieser Rente mit $(v\,\mathrm{a})_x$ und nennen sie eine *lebenslänglich veränderliche Rente.*

Die Einmalprämie dieser Rente hat als Summe der Erlebensversicherungen

$$ k\,.\,{}_0E_x, \quad (k \pm \delta)\,{}_1E_x, \quad (k \pm 2\,\delta)\,{}_2E_x, \quad \ldots\ldots \quad [k \pm (\omega - x)\,\delta]\,{}_{(\omega-x)}E_x $$

den Wert

$$ (v\,\mathrm{a})_x = \frac{k\,\mathrm{D}_x + (k \pm \delta)\,\mathrm{D}_{x+1} + (k \pm 2\delta)\mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots + [k \pm (\omega - x)\,\delta]\,D_\omega}{\mathrm{D}_x}. $$

Nun ist aber der Zähler

$$ k\,\mathrm{D}_x + (k \pm \delta)\,\mathrm{D}_{x+1} + (k \pm 2\,\delta)\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots + [k \pm (\omega - x)\,\delta]\,\mathrm{D}_\omega = $$
$$ = k\,(\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_{x+1} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_\omega) \pm \delta\,[\mathrm{D}_{x+1} + 2\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots + (\omega - x)\,\mathrm{D}_\omega]. $$

Setzt man

$$ \begin{aligned} \mathrm{D}_{x+1} + \mathrm{D}_{x+2} + \mathrm{D}_{x+3} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_\omega &= \mathbb{N}_{x+1}, \\ + \mathrm{D}_{x+2} + \mathrm{D}_{x+3} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_\omega &= \mathbb{N}_{x+2}, \\ + \mathrm{D}_{x+3} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_\omega &= \mathbb{N}_{x+3}, \\ &\ \vdots \\ + \mathrm{D}_{\omega-1} + \mathrm{D}_\omega &= \mathbb{N}_{\omega-1}. \\ + \mathrm{D}_\omega &= \mathbb{N}_\omega \end{aligned} $$

und addiert diese Gleichungen, so erhält man

$$ \mathrm{D}_{x+1} + 2\,\mathrm{D}_{x+2} + 3\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots\cdots + (\omega - x)\mathrm{D}_\omega = \mathbb{N}_{x+1} + \mathbb{N}_{x+2} + \cdots\cdots + \mathbb{N}_\omega $$

oder, wenn man *die Summe der Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden* $\mathbb{N}_{x+1} + \mathbb{N}_{x+2} + \cdots\cdots + \mathbb{N}_\omega = \Sigma\,\mathbb{N}_{x+1}$ mit $\mathbb{S}_{x+1}$ bezeichnet,

$$ \mathrm{D}_{x+1} + 2\,\mathrm{D}_{x+2} + 3\,\mathrm{D}_{x+3} + \cdots\cdots + (\omega - x)\,\mathrm{D}_\omega = \mathbb{S}_{x+1}. $$

Der Zähler

$$ k\,\mathrm{D}_x + (k \pm \delta)\,\mathrm{D}_{x+1} + (k \pm 2\,\delta)\,\mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots + [k + (\omega - x)\,\delta]\,\mathrm{D}_\omega $$

nimmt hiemit die Form an

$k\,\mathbb{N}_x \pm \delta\,\mathbb{S}_{x+1}$ oder, da man $\mathbb{S}_{x+1} = \mathbb{S}_x - \mathbb{N}_x$ setzen kann,

$$(k \mp \delta)\,\mathbb{N}_x \pm \delta\,\mathbb{S}_x.$$

Folglich hat die Einmalprämie $(v\,a)_x$ den Wert

$$(v\,a)_x = \frac{(k \mp \delta)\,\mathbb{N}_x \pm \delta\,\mathbb{S}_x}{D_x}.$$

Nimmt die Rente jährlich um den Betrag δ zu, so hat die *lebenslänglich steigende Rente* den Wert

$$(v\,a)_x = \frac{(k - \delta)\,\mathbb{N}_x + \delta\,\mathbb{S}_x}{D_x},$$

während sie als *lebenslänglich fallende Rente,* wobei sie jährlich um den Betrag δ abnimmt, den Wert hat

$$(v\,a)_x = \frac{(k + \delta)\,\mathbb{N}_x - \delta\,\mathbb{S}_x}{D_x}.$$

Damit letztere Rente nicht negativ wird, sind die Werte für k und δ an die Bedingung

$$(k + \delta)\,\mathbb{N}_x > \delta\,\mathbb{S}_x$$

gebunden.

Für $k = 1$ und $\delta = 1$ geht die lebenslänglich steigende Rente über in

$$(I\,a)_x = \frac{\mathbb{S}_x}{D_x}.$$

2. Soll die veränderliche Rente nicht sofort, sondern erst nach Ablauf von m Jahren mit dem Betrage k beginnen und dann alljährlich um den Betrag δ zu oder abnehmen, so hat diese um m Jahre *aufgeschobene veränderliche Leibrente,* die wir mit ${}_{m|}(v\,a)_x$ bezeichnen, den Wert

$${}_{m|}(v\,a)_x = \frac{k\,D_{x+m} + (k \pm \delta)\,D_{x+m+1} + \cdots\cdots + [k \pm (\omega - x - m)\,\delta]\,D_\omega}{D_x}$$

oder

$${}_{m|}(v\,a)_x = \frac{(k \mp \delta)\,\mathbb{N}_{x+m} \pm \delta\,\mathbb{S}_{x-m}}{D_x}.$$

Für $k = 1$ und $\delta = 1$ geht die aufgeschobene, lebenslänglich steigende Rente über in

$${}_{m|}(I\,a)_x = \frac{\mathbb{S}_{x+m}}{D_x}.$$

3. Wird die Rente zu Beginn des ersten, zweiten, ... $n$ten Jahres mit dem Betrage k, $k \pm \delta$, ... $k \pm (n-1)\,\delta$, ausbezahlt und hört dann auf, so hat diese *kurze veränderliche Leibrente,* die man mit $(v\,a)_{x\overline{n}|}$ bezeichnet, den Wert

$$(v\,a)_{x\overline{n}|} = \frac{k\,D_x + (k \pm \delta)\,D_{x+1} + (k \pm 2\delta)\,D_{x+2} + \cdots\cdots [k \pm (n-1)\,\delta].D_{x+n-1}}{D_x}$$

oder

$$(v\,a)_{x\overline{n}|} = \frac{k\,(D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+n-1}) \pm \delta\,[D_{x+1} +}{D_x}$$

$$\frac{+\,2\,D_{x+2} + \cdots\cdots + (n-1).D_{x+n-1}]}{D_x}$$

Nun ist aber

$$D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots + D_{x+n-1} = \mathbb{N}_{x+1} - \mathbb{N}_{x+n},$$

$$D_{x+2} + \cdots\cdots + D_{x+n-1} = \mathbb{N}_{x+2} - \mathbb{N}_{x+n},$$

$$\vdots$$

$$D_{x+n-1} = \mathbb{N}_{x+n-1} - \mathbb{N}_{x+n}.$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man

$$D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + \cdots\cdots + (n-1)\,D_{x+n-1} =$$
$$= \mathbb{N}_{x+1} + \mathbb{N}_{x+2} + \cdots\cdots + \mathbb{N}_{x+n-1} - (n-1)\,\mathbb{N}_{x+n}$$

oder

$$D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + \cdots\cdots + (n-1)\,D_{x+n-1} = \mathbb{S}_{x+1} - \mathbb{S}_{x+n} - n\,\mathbb{N}_{x+n} + \mathbb{N}_{x+n}$$

oder auch

$$D_{x+1} + 2\,D_{x+2} + \cdots + (n-1)\,D_{x+n-1} = \mathbb{S}_x - \mathbb{S}_{x+n} - (\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}) - n\,\mathbb{N}_{x+n}.$$

Folglich bekommt man für diese Leibrente den Wert

$$(v\,a)_{x\overline{n}|} = \frac{k\,(\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}) \pm \delta\,[\mathbb{S}_x - \mathbb{S}_{x+n} - n\,\mathbb{N}_{x+n} - (\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n})]}{D_x}$$

oder

$$(v\,a)_{x\overline{n}|} = \frac{(k \mp \delta)\,(\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}) \pm \delta\,(\mathbb{S}_x - \mathbb{S}_{x+n} - n\,\mathbb{N}_{x+n})}{D_x}.$$

Für $k = 1$ und $\delta = 1$ geht die kurze lebenslänglich steigende Rente über in

$$(I\,a)_{x\overline{n}|} = \frac{\mathbb{S}_x - \mathbb{S}_{x+n} - n\,\mathbb{N}_{x+n}}{D_x}.$$

4. Soll der Bezug der veränderlichen Rente k, $k \pm \delta$, $k \pm 2\,\delta$, ... $k \pm (n-1)\,\delta$ nicht sofort, sondern erst nach Ablauf von m Jahren beginnen, dann hat diese *aufgeschobene, kurze veränderliche Leibrente,* die wir mit ${}_{m|}(v\,a)_{x\overline{n}|}$ bezeichnen, den Wert

$${}_{m|}(v\,a)_{x\overline{n}|} = \frac{k\,D_{x+m} + (k \pm \delta)\,D_{x+m+1} + \cdots\cdots + [k \pm (n-1)\,\delta]\,D_{x+m+n-1}}{D_x}$$

oder

$${}_{m|}(v\,a)_{x\overline{n}|} = \frac{(k \mp \delta)\,(\mathbb{N}_{x+m} - \mathbb{N}_{x+m+n}) \pm \delta\,(\mathbb{S}_{x+m} - \mathbb{S}_{x+m+n} - n\,\mathbb{N}_{x+m+n})}{D_x}.$$

Für $k=1$ und $\delta=1$ erhält man, wenn die Rente eine steigende ist,

$$_{m|}(\mathrm{I\,a})_{x\overline{n}|} = \frac{\mathrm{S}_{x+m} - \mathrm{S}_{x+m+n} - n\,\mathrm{N}_{x+m+n}}{\mathrm{D}_x}.$$

5. Wird die Rente zu Beginn des ersten, zweiten, ... $n$ten Jahres mit dem Betrage k, $k \pm \delta$, ... $k \pm (n-1)\,\delta$ und zu Beginn eines jeden weiteren Jahres mit dem bereits erreichten Betrage $k \pm (n-1)\,\delta$ lebenslänglich ausgezahlt, so hat diese durch n Jahre *veränderliche und dann konstant bleibende lebenslängliche Rente,* die wir mit $(v_{\overline{n}|}\,\mathrm{a})_x$ bezeichnen, den Wert

$$(v_{\overline{n}|}\,\mathrm{a})_x = \frac{k\,\mathrm{D}_x + (k \pm \delta)\,\mathrm{D}_{x+1} + \cdots\cdots + [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{D}_{x+n-1} +}{\mathrm{D}_x}$$

$$\frac{+ [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{D}_{x+n} + \cdots\cdots + [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{D}_\omega}{\mathrm{D}_x}.$$

Für den Zähler des Bruches auf der rechten Seite dieser Gleichung

$$k\,\mathrm{D}_x + (k \pm \delta)\,\mathrm{D}_{x+1} + \cdots\cdots + [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{D}_{x+n-1} +$$
$$+ [k \pm (n-1)\,\delta]\,[\mathrm{D}_{x+n} + \mathrm{D}_{x+n+1} + \cdots\cdots + \mathrm{D}_\omega]$$

kann auch

$$(k \mp \delta)\,(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) \pm \delta\,(\mathrm{S}_x - \mathrm{S}_{x+n} - n\,\mathrm{N}_{x+n}) + (k \mp \delta)\,\mathrm{N}_{x+n} \pm \delta n\,\mathrm{N}_{x+n}$$

oder

$$(k \mp \delta)\,\mathrm{N}_x \pm \delta\,(\mathrm{S}_x - \mathrm{S}_{x+n})$$

gesetzt werden.

Mithin ist

$$(v_{\overline{n}|}\,\mathrm{a})_x = \frac{(k \mp \delta)\,\mathrm{N}_x \pm \delta\,(\mathrm{S}_x - \mathrm{S}_{x+n})}{\mathrm{D}_x}.$$

Ist die Rente eine steigende, so erhält man für $k=1$ und $\delta=1$

$$(\mathrm{I}_{\overline{n}|}\,\mathrm{a})_x = \frac{\mathrm{S}_x - \mathrm{S}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}.$$

6. Soll der Bezug der durch n Jahre veränderlichen und dann konstant bleibenden lebenslänglichen Leibrente nicht sofort, sondern erst nach Ablauf von m Jahren beginnen, so hat diese *aufgeschobene* durch n Jahre *veränderliche und dann konstant bleibende lebenslängliche Leibrente,* wenn wir sie mit $_{m|}(v_{\overline{n}|}\,\mathrm{a})_x$ bezeichnen, den Wert

$$_{m|}(v_{\overline{n}|}\,\mathrm{a})_x = \frac{k\,\mathrm{D}_{x+m} + (k \pm \delta)\,\mathrm{D}_{x+m+1} + \cdots\cdots +}{\mathrm{D}_x}$$

$$\frac{+ [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{D}_{x+m+n-1} + \cdots\cdots + [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{D}_\omega}{\mathrm{D}_x}$$

oder

$$_{m|}(v_{\overline{n}|}\,\mathrm{a})_x = \frac{(k \mp \delta)\,\mathrm{N}_{x+m} \pm \delta\,(\mathrm{S}_{x+m} - \mathrm{S}_{x+m+n})}{\mathrm{D}_x}.$$

Für $k=1$ und $\delta=1$ erhält man, im Falle die Rente eine steigende ist

$$_{m|}(\mathrm{I}_{\overline{n}|}\,\mathrm{a})_x = \frac{\mathrm{S}_{x+m} - \mathrm{S}_{x+m+n}}{\mathrm{D}_x}.$$

Beispiel.

Eine 30jährige Person will durch eine einmalige Nettozahlung eine Leibrente kaufen, die erst mit dem 70. Lebensjahre mit K 2.000·— beginnen und alljährlich um K 500·— steigen soll. Wie groß wird diese Zahlung sein?

Hier ist $k = K$ 2.000·—, $\delta = K$ 500·—, $x = 30$ und $m = 40$.

Mithin erhält man nach der Gleichung

$$_{m|}(v\,\mathrm{a})_x = \frac{(k-\delta)\,\mathrm{N}_{x+m} + \delta\,\mathrm{S}_{x+m}}{\mathrm{D}_x},$$

wenn man darin die entsprechenden aus der Tafel VIII entnommenen Werte einsetzt

$$_{40|}(v\,\mathrm{a})_{30} = \frac{1500 \times 39524{\cdot}3 + 500 \times 259089{\cdot}5}{34982} = 5.397{\cdot}95.$$

Die Nettoprämie beträgt K 5.397·95.

§ 44. *Unterjährige Rente.*

Wird eine Rente nicht jährlich, sondern in kürzeren Zeiträumen ausbezahlt, so nennt man sie eine *unterjährige Rente.*

Den Wert einer lebenslänglichen Pränumerando-Leibrente, die im Laufe eines Jahres in n Terminen mit dem jedesmaligen Betrage $\frac{1}{n}$ gezahlt wird, bezeichnet man mit $\mathrm{a}_x^{(n)}$. Eine solche *Pränumerando-Leibrente mit unterjähriger Fälligkeit* wird auch kurz eine *Pränumerando-ntel Rente* genannt.

Um den in der Praxis am häufigsten verwendeten Wert für diese Rente bestimmen zu können, nehmen wir, da die nach einem Jahre beginnende also um ein Jahr aufgeschobene Leibrente von einer Kapitalseinheit um 1 kleiner ist als die sofort beginnende Leibrente, mithin den Wert $\mathrm{a}_x - 1$ hat, dementsprechend näherungsweise an, daß die um $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ... $\frac{n-1}{n}$ Jahre aufgeschobenen Leibrenten die Werte $\mathrm{a}_x - \frac{1}{n}$, $\mathrm{a}_x - \frac{2}{n}$, ... $\mathrm{a}_x - \frac{n-1}{n}$ haben.

Die erste, $(n+1)$te, $(2n-1)$te ...... Zahlung des Rentenbetrages $\frac{1}{n}$ findet sofort, nach einem, zwei, ... Jahren statt. Diese Zahlungen bilden eine Pränumerando-Leibrente mit dem Werte

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{a}_x.$$

Die zweite, $(n+2)$te, $(2n+2)$te ...... Zahlung ist gegen die vorhergehenden Zahlungen um $\frac{1}{n}$ Jahr aufgeschoben; ihre Summe hat daher den Wert

$$\frac{1}{n}\left(\mathrm{a}_x - \frac{1}{n}\right).$$

Ebenso ist die dritte, $(n+3)$te, $(2n+3)$te ...... Zahlung gegen die vorgehenden Zahlungen wiederum um $\frac{1}{n}$ Jahr, also gegen die ersten um $\frac{2}{n}$ Jahre aufgeschoben; ihre Summe hat den Wert.

$$\frac{1}{n}\left(\mathrm{a}_x - \frac{2}{n}\right).$$

Endlich hat die Summe der $n$ten, $2n$ten, $3n$ten ...... Zahlung der um $\frac{n-1}{n}$ Jahre aufgeschobenen Leibrente mit dem jedesmaligen Betrage von $\frac{1}{n}$ den Wert

$$\frac{1}{n}\left(\mathrm{a}_x - \frac{n-1}{n}\right).$$

Folglich hat die Leibrente vom Betrage $\frac{1}{n}$, zahlbar am Anfange eines jeden $n$ten Teiles des Jahres, solange die versicherte $x$jährige Person lebt, den Wert

$$\mathrm{a}_x^{(n)} = \frac{1}{n}\mathrm{a}_x + \frac{1}{n}\left(\mathrm{a}_x - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\left(\mathrm{a}_x - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\left(\mathrm{a}_x - \frac{n-1}{n}\right)$$

oder

$$\mathrm{a}_x^{(n)} = \frac{1}{n}\left[\mathrm{a}_x + \left(\mathrm{a}_x - \frac{1}{n}\right) + \left(\mathrm{a}_x - \frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots + \left(\mathrm{a}_x - \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

oder auch

$$\mathrm{a}_x^{(n)} = \frac{1}{n}\left[n\,\mathrm{a}_x - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{n}\right)\right].$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{n}$$

eine arithmetische Reihe mit dem Anfangsgliede $\frac{1}{n}$, dem Endgliede $\frac{n-1}{n}$ und mit der Gliederanzahl $(n-1)$. Es ist daher

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right)$$

oder

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2}.$$

Folglich ist

$$\mathrm{a}_x^{(n)} = \frac{1}{n}\left(n\,\mathrm{a}_x - \frac{n-1}{2}\right)$$

oder

$$\mathrm{a}_x^{(n)} = \mathrm{a}_x - \frac{n-1}{2n}.$$

Nach dieser Gleichung wäre der Wert der Pränumerando-Leibrente zahlbar:

halbjährlich ... $\mathrm{a}_x^{(2)} = \mathrm{a}_x - \frac{1}{4} = \mathrm{a}_x - 0{\cdot}25$,

vierteljährlich .. $\mathrm{a}_x^{(4)} = \mathrm{a}_x - \frac{3}{8} = \mathrm{a}_x - 0{\cdot}375$,

monatlich .... $\mathrm{a}_x^{(12)} = \mathrm{a}_x - \frac{11}{24} = \mathrm{a}_x - 0{\cdot}45\,83333$

und wöchentlich ... $\mathrm{a}_x^{(52)} = \mathrm{a}_x - \frac{51}{104} = \mathrm{a}_x - 0{\cdot}49\,03846$.

Der Wert der Postnumerando-Leibrente vom Betrage $\frac{1}{n}$, zahlbar am Schlusse jedes $n$ten Teiles des Jahres, ist um $\frac{1}{n}$ kleiner als der Wert der Pränumerando-$n$tel Rente.

Es ist daher

$$a_x^{(n)} = \mathrm{a}_x^{(n)} - \frac{1}{n}$$

oder

$$a_x^{(n)} = \mathrm{a}_x - \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{n}$$

oder auch

$$a_x^{(n)} = a_x + 1 - \frac{n+1}{2n}$$

oder endlich

$$a_x^{(n)} = a_x + \frac{n-1}{2n}.$$

Die um m Jahre *aufgeschobene Pränumerando-Leibrente mit unterjähriger Fälligkeit* hat, wenn wir sie mit ${}_{m|}\mathrm{a}_x^{(n)}$ bezeichnen und die Gleichung

$${}_{m|}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+m}}{D_x}\,\mathrm{a}_{x+m}$$

benützen, den Wert

$$_{m|}a_x^{(n)} = \frac{D_{x+m}}{D_x} a_{x+m}^{(n)}$$

oder

$$_{m|}a_x^{(n)} = \left(a_{x+m} - \frac{n-1}{2n}\right)\frac{D_{x+m}}{D_x}$$

oder auch

$$_{m|}a_x^{(n)} = {}_{m|}a_x - \frac{n-1}{2n}\,\frac{D_{x+m}}{D_x}.$$

Die *kurze unterjährige Pränumerando-Leibrente* läßt sich, wenn sie durch s Jahre bezogen wird, leicht aus der Identität

$$_s a_x^{(n)} = a_x^{(n)} - {}_{s|}a_x^{(n)}$$

berechnen.

Beispiel.

Eine 35jährige Person will mit dem erreichten 60. Lebensjahre lebenslänglich eine monatliche Leibrente von K 300·— beziehen. Wie groß ist die Einmalprämie, die sie dafür zu zahlen hat?

Wendet man, da es sich in diesem Falle um eine aufgeschobene unterjährige Leibrente handelt, die Gleichung

$$_{m|}a_x^{(n)} = \left(a_{x+m} - \frac{n-1}{2n}\right)\frac{D_{x+m}}{D_x}$$

mit den entsprechenden aus der Tafel VIII entnommenen Werten an, so erhält man

$$_{25|}a_{35}^{(12)} = (11{\cdot}866 - 0{\cdot}4583)\,\frac{9421{\cdot}2}{28849} = 3{\cdot}725\,39$$

und für die einmalige Nettoprämie den Betrag von K 13.411·40.

2. Einmalprämien für Todesfallversicherungen.

§ 45. *Lebenslängliche Todesfallversicherung.*

Eine Anwartschaft, die beim Tode einer versicherten Person fällig ist, wird eine *Todesfallversicherung* genannt.

Versichert sich eine $x$jährige Person derart, daß ihre Erben eine Kapitalseinheit ausbezahlt erhalten, wenn sie nach Ablauf von m Jahren im $(x+m)$ten Lebensjahre oder, was dasselbe ist, im $(m+1)$ten Versicherungsjahre stirbt, so ist der auf den Tag des Versicherungsabschlusses bezogene Wert dieser am Schlusse des $(m+1)$ten Versicherungsjahres fälligen Anwartschaft gleich dem Produkte aus der Wahrscheinlichkeit der Fälligkeit dieser Kapitalseinheit und dem entsprechenden Abzinsungsfaktor.

Nun ist aber diese Wahrscheinlichkeit identisch mit der Wahrscheinlichkeit $_{m|}q_x = \frac{d_{x+m}}{l_x}$, daß die $x$jährige Person im $(x+m)$ten Lebensjahre stirbt.

Mithin findet man den Barwert dieser Anwartschaft, der auch der Einmalprämie dieser Versicherungsart, der sogenannten *„kurzen Todesfallversicherung auf ein Jahr"* gleich ist und den wir mit $_mT_x$ bezeichnen

$$_mT_x = {}_{m|}q_x\, v^{m+1}$$

oder, wenn wir darin für $_{m|}q_x$ den Wert $\frac{d_{x+m}}{l_x}$ einsetzen und die rechte Seite dieser Gleichung mit $\frac{v^x}{v^x}$ multiplizieren,

$$_mT_x = \frac{d_{x+m}\, v^{x+m+1}}{l_x v^x}.$$

Man setzt $C_x = d_x v^{x+1}$, ebenso $C_{x+m} = d_{x+m} v^{x+m+1}$ und nennt diese Zahlen die *„diskontierten Zahlen der Toten"*.

Folglich ist

$$_mT_x = \frac{C_{x+m}}{D_x}.$$

Zu dieser Gleichung kann man aber auch auf folgende Art gelangen. Angenommen, daß eine jede von den im Alter von x Jahren stehenden l_x Personen eine solche Versicherung auf eine Kapitalseinheit eingeht, so ist nach Ablauf von m Jahren, da im Alter von $(x+m)$ bis $(x+m+1)$ Jahren $d_{x+m} = l_{x+m} - l_{x+m+1}$ Personen sterben, am Schlusse des $(m+1)$ten Versicherungsjahres die Summe von d_{x+m} Kapitalseinheiten fällig, die am Tage des Versicherungsabschlusses den Wert $d_{x+m} v^{m+1}$ haben. Der auf eine Person entfallende Anteil ist somit

$$\frac{d_{x+m}\, v^{m+1}}{l_x},$$

welcher auch der Einmalprämie $_mT_x$ gleich sein muß.

Es ist mithin

$$_mT_x = \frac{d_{x+m}\, v^{m+1}}{l_x} = \frac{d_{x+m}\, v^{x+m+1}}{l_x v^x}$$

oder

$$_mT_x = \frac{C_{x+m}}{D_x}.$$

Findet die Auszahlung der Versicherungssumme unbedingt statt, nur ist ihr Zeitpunkt unbestimmt, so heißt die Versicherung eine *lebenslängliche* oder *vollständige Todesfallversicherung.*

Nehmen wir also an, daß das versicherte Kapital den Erben des Versicherten am Schlusse jenes Versicherungsjahres ausgezahlt wird, in welchem der Tod der versicherten Person eintritt, so setzt sich die einmalige Nettoprämie der lebenslänglichen Todesfallversicherung, da der Tod im ersten, zweiten, ... $(\omega - x)$ Versicherungsjahr eintreten kann, aus den einzelnen Einmalprämien für die jeweiligen kurzen Todesfallversicherungen auf ein Jahr zusammen.

Bezeichnen wir die Einmalprämie einer lebenslänglichen Todesfallversicherung einer $x$jährigen Person mit A_x, so ist ihr Wert

$$A_x = {}_0T_x + {}_1T_x + \cdots + (\omega - x)\, T_x$$

oder

$$A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \cdots\cdots + \frac{C_\omega}{D_x}$$

oder auch

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_\omega}{D_x}.$$

Setzen wir *die Summe der diskontierten Zahlen der Toten*

$$C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_\omega = \Sigma C_x = M_x,$$

so erhält man schließlich für die Prämie einer lebenslänglichen Todesfallversicherung den Wert

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Wenn man in die Gleichung

$$C_x = d_x v^{x+1}$$

für d_x den Wert $l_x - l_{x+1}$ einsetzt, so bekommt man

$$C_x = l_x v^x . v - l_{x+1} v^{x+1} = v D_x - D_{x+1}$$

und

$$M_x = \Sigma C_x = v \Sigma D_x - \Sigma D_{x+1} = v \Sigma D_x - \Sigma D_x + D_x$$

oder

$$M_x = D_x - (1 - v)\, \Sigma D_x$$

oder auch, wenn wir darin für $1 - v$ den Diskonto d und für ΣD_x den Wert $\mathbb{N}_x$ einsetzen,

$$M_x = D_x - d\, \mathbb{N}_x.$$

Die einmalige Nettoprämie dieser Todesfallversicherung, ausgedrückt durch die diskontierten Zahlen der Lebenden, ist

$$A_x = 1 - d \frac{\mathbb{N}_x}{D_x}$$

oder

$$A_x = 1 - d\, a_x.$$

In diesem Falle müssen die Leibrenten auf Grund der Sterbetafel für Todesfallversicherungen und nicht auf Grund einer solchen für Leibrentenversicherungen berechnet werden.

Beispiel.

Eine 40jährige Person will ihren Erben einen Betrag von K 10.000·— hinterlassen, welcher am Schlusse ihres Sterbejahres ausbezahlt werden soll. Wie viel wird sie dafür als einmalige Nettoprämie zu zahlen haben?

Fast alle Sterbetafeln enthalten auch die Kolonnen C_x, M_x, a_x und A_x für jedes Alter.

So z. B. entnimmt man aus Tafel XI.

$$A_{40} = 0{\cdot}4435818.$$

Die einmalige Nettoprämie beträgt mithin K 4.435·82. Die Zahlung von Einmalprämien für größere Versicherungssummen sind ihrer Höhe halber in der Praxis nicht sehr gebräuchlich.

§ 46. *Aufgeschobene Todesfallversicherung.*

Eine Versicherung heißt eine *aufgeschobene Todesfallversicherung*, wenn die Versicherungssumme erst nach Ablauf von m Jahren, vom Zeitpunkte des Versicherungsabschlusses an gerechnet, zur Auszahlung gelangt. Stirbt die versicherte $x$jährige Person innerhalb der m Jahre, die *Karenzzeit oder Probejahre* heißen, so findet keine Zahlung der Versicherungssumme statt. Ist das versicherte Kapital eine Einheit, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie dieser Versicherung mit ${}_{m|}A_x$.

Da das versicherte Kapital in den ersten m Jahren nach Abschluß der Versicherung, wenn der Versicherte innerhalb dieser Zeit stirbt, nicht zur Auszahlung gelangt, so hat die Einmalprämie als die Summe der einzelnen Prämien für die jeweiligen kurzen Todesfallversicherungen auf ein Jahr den Wert

$${}_{m|}A_x = {}_mT_x + {}_{m+1}T_x + \cdots\cdots + (\omega - x) . T_x$$

oder

$${}_{m|}A_x = \frac{C_{x+m} + C_{x+m+1} + \cdots\cdots + C_\omega}{D_x}$$

oder auch

$${}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches $\frac{M_{x+m}}{D_x}$ mit D_{x+m}, so nimmt der Wert von ${}_{m|}A_x$ die Form an

$${}_{m|}A_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} A_{x+m}$$

oder, durch die Leibrente ausgedrückt,

$$_{m|}A_x = \frac{D_{x+m}}{D_x}(1 - d\,a_{x+m}).$$

Aus der Identität

$$M_x = v\,\Sigma D_x - \Sigma D_{x+1}$$

oder

$$M_x = v\,N_x - N_{x+1}$$

folgt auch

$$M_{x+m} = v\,N_{x+m} - N_{x+m+1}$$

und daraus

$$_{m|}A_x = v\,\frac{N_{x+m}}{D_x} - \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

oder

$$_{m|}A_x = v\,_{m|}a_x - {}_{m+1|}a_x.$$

Wie man sieht, erscheint hier die aufgeschobene Todesfallversicherung durch aufgeschobene Leibrentenwerte ausgedrückt.

Diese Versicherungsart bildet eine Schutzvorrichtung der Versicherungsgesellschaften, um gesundheitlich besonders gefährdete Leben von dem Abschlusse einer Todesfallversicherung möglichst abzuhalten, wie z. B. bei minderwertigen oder ärztlich nicht untersuchten Leben.

Beispiel.

Eine 35jährige Person will nach ihrem Tode ihren Erben ein Kapital von *K* 10.000·— hinterlassen. Die Versicherungsgesellschaft stellt 3 Probejahre fest, so daß, wenn die versicherte Person vor Ablauf der ersten 3 Jahre stirbt, deren Erben keinerlei Ansprüche an die Versicherungsanstalt erheben können. Wie groß ist die einmalige Nettoprämie?

Wendet man auf dieses Beispiel die Gleichung an

$$_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

und setzt darin die aus der Tafel XIII entnommenen Werte für M_{x+m} und D_x ein, so erhält man

$$_{3|}A_{35} = \frac{10304{\cdot}72}{27913} = 0{\cdot}369\,173.$$

Die Einmalprämie beträgt mithin *K* 3.691·73.

§ 47. *Kurze Todesfallversicherung.*

Versichert sich eine *x*jährige Person in der Weise, daß die Versicherungssumme nur dann ausbezahlt wird, wenn der Tod der versicherten Person innerhalb der nächsten *n* Jahre nach Abschluß der Versicherung eintritt, so nennt man diese Versicherung eine *abgekürzte* oder *temporäre* oder auch eine *kurze Todesfallversicherung.*

Die einmalige Nettoprämie wird, falls die Versicherungssumme eine Kapitalseinheit beträgt, mit $A^1_{x\overline{n}|}$ (lies: A *x* unter 1, *n* in rechtwinklige Klammer gesetzt) oder mit $_{|n}A_x$ bezeichnet. Sie hat als die Summe der einzelnen Prämien der *n* ersten kurzen Todesfallversicherungen auf ein Jahr den Wert

$$_{|n}A_x = {}_0T_x + {}_1T_x + \cdots\cdots + {}_{n-1}T_x$$

oder

$$_{|n}A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{x+n-1}}{D_x}.$$

Nun ist aber

$$C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{x+n-1} =$$

$$(C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{x+n-1} + C_{x+n} + \cdots + C_\omega) - (C_{x+n} + C_{x+n+1} + \cdots + C_\omega)$$

oder

$$C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{x+n-1} = M_x - M_{x+n}.$$

Durch Substitution dieses Wertes für die Summe der diskontierten Zahlen der Toten in die Gleichung für $_{|n}A_x$ erhält man

$$_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

oder

$$_{|n}A_x = A_x - {}_{n|}A_x.$$

Die kurze Todesfallversicherung ist gleich der Differenz aus der lebenslänglichen und der um ihre Dauer aufgeschobenen Todesfallversicherung.

Drückt man A_x und $_{n|}A_x$ durch Leibrentenwerte aus, so erhält man

$$_{|n}A_x = 1 - d\,a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}(1 - d\,a_{x+n})$$

oder

$$_{|n}A_x = 1 - d\left(a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}a_{x+n}\right) - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

oder auch

$$_{|n}A_x = 1 - d\,_{|n}a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Beispiel.

Jemand will zur Deckung seiner Gläubiger sich auf ein Kapital von *K* 10.000·— versichern, falls er im Laufe der nächsten 8 Jahre stirbt. Wenn er nun 40 Jahre alt ist, wie groß ist dann die einmalige Nettoprämie?

Unter Anwendung der Gleichung

$$_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

und nach Einsetzung der entsprechenden Werte für M_x und M_{x+n}, die man aus der Tafel XIII entnehmen kann, erhält man

$$ {}_{|8}A_{40} = 0·077165. $$

Als einmalige Nettoprämie wird er den Betrag von *K* 771·65 zahlen.

§ 48. *Kurze aufgeschobene Todesfallversicherungen.*

Als Kombination der beiden in den vorhergehenden Paragraphen behandelten Versicherungsarten ist die *kurze aufgeschobene Todesfallversicherung* aufzufassen, bei welcher die Versicherungssumme frühestens nach m Jahren dann zur Auszahlung gelangt, wenn die versicherte $x$jährige Person innerhalb der darauffolgenden nächsten n Jahre stirbt. Ist die Versicherungssumme eine Kapitalseinheit und bezeichnet man die einmalige Nettoprämie mit ${}_{m|n}A_x$, so hat letztere als die Summe aus den einzelnen Prämien für die entsprechenden kurzen Todesversicherungen auf ein Jahr den Wert

$$ {}_{m|n}A_x = {}_mT_x + {}_{m+1}T_x \cdots\cdots + {}_{m+n-1}T_x $$

oder

$$ {}_{m|n}A_x = \frac{C_{x+m} + C_{x+m+1} + \cdots\cdots + C_{x+m+n-1}}{D_x} $$

oder auch

$$ {}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}. $$

Nun kann man auch diese Gleichung auf die Form bringen

$$ {}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} - \frac{M_{n+m+n}}{D_x} $$

oder

$$ {}_{m|n}A_x = {}_{m|}A_x - {}_{m+n|}A_x. $$

Beispiel.

Wie groß ist die einmalige Nettoprämie, die eine 40jährige Person für eine vom erreichten 51. bis zum vollendeten 60. Lebensjahre dauernden Todesfallversicherung zu zahlen hätte, wenn die Versicherungssumme *K* 5.000 beträgt?

Wendet man die Gleichung

$$ {}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} $$

und die Tafel XIII an, so erhält man

$$ {}_{11|10}A_{40} = \frac{7442·24 - 4820·15}{22593} = 0·116058. $$

Die einmalige Nettoprämie wäre *K* 580·29.

§ 49. *Gemischte Versicherung.*

Gelangt das versicherte Kapital entweder am Ende des Sterbejahres, falls die versicherte $x$jährige Person innerhalb der nach Abschluß der Versicherung folgenden n Jahre stirbt oder mit dem erreichten $(x+n)$ten Lebensjahre unter allen Umständen zur Auszahlung, so spricht man von einer *gemischten Versicherung* oder einer *abgekürzten Todesfall- und Erlebensversicherung* oder auch von einer *Versicherung auf Er- und Ableben.* Ist die Versicherungssumme eine Kapitalseinheit, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie dieser Versicherungskombination mit $A_{x\overline{n}|}$. Ihr Wert setzt sich zusammen aus dem Werte ${}_nA_x$ der kurzen Todesfallversicherung auf n Jahre und dem Werte ${}_nE_x$ der um n Jahre aufgeschobenen Erlebensversicherung.

Es ist also

$$ A_{x\overline{n}|} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x $$

oder durch Grundwerte ausgedrückt

$$ A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} $$

Drückt man in dieser Gleichung die Summe der diskontierten Zahlen der Toten durch die diskontierten Zahlen der Lebenden aus, so erhält man

$$ A_{x\overline{n}|} = \frac{D_x - d\,N_x - D_{x+n} + d\,N_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} $$

oder

$$ A_{x\overline{n}|} = 1 - d\,\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} $$

oder auch

$$ A_{x\overline{n}|} = 1 - d\;{}_na_x. $$

Da die meisten Versicherungsanstalten bei lebenslänglichen Todesfallversicherungen die Versicherungssumme beim Tode des Versicherten oder in der Regel spätestens bei Erreichung des 85. oder 90. Lebensjahres an den Versicherten selbst auszahlen, so sind solche Versicherungen streng genommen gemischte Versicherungen.

Wird das versicherte Kapital nach n Jahren an den Versicherten, falls er am Leben ist und außerdem noch am Ende seines Sterbejahres an seine Erben ausbezahlt, so kann auch eventuell eine zweimalige Kapitalsauszahlung erfolgen. Stirbt die versicherte $x$jährige Person innerhalb der n Jahre nach dem Versicherungsabschlusse, so wird der Betrag nur einmal am Schlusse ihres Sterbejahres an ihre Erben ausbezahlt.

Diese Versicherungsart, deren einmalige Nettoprämie für die versicherte Kapitalseinheit wir mit A_{xn} bezeichnen, besteht aus einer auf

n Jahre aufgeschobenen Erlebensversicherung und einer lebenslänglichen Todesfallversicherung.

Ihr Wert ist demnach

$$A_{xn} = {}_nE_x + A_x$$

oder

$$A_{xn} = \frac{D_{x+n} + M_x}{D_x}.$$

Beispiel.

Eine 35jährige Person will mit dem erreichten 60. Lebensjahre ein Kapital von K 10.000·— erhalten oder bei ihrem Tode, falls derselbe innerhalb der 25 Jahre nach Abschluß der Versicherung eintritt, dieses Kapital ihren Erben hinterlassen. Welche einmalige Nettoprämie hat sie hiefür zu entrichten.

Unter Anwendung der Gleichung

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

und nach Einsetzung der entsprechenden Werte für M_x, M_{x+n}, D_{x+n} und D_x, die man aus der Tafel XII a entnehmen kann, erhält man

$$A_{35,\overline{25}|} = 0{\cdot}480\,838.$$

Die einmalige Nettoprämie beträgt K 4.808·38.

§ 50. *Versicherung à terme fixe (mit festem Ablaufstermine).*

Versichert sich jemand auf eine Summe derartig, daß dieselbe nach n Jahren entweder an ihn selbst oder an seine Erben zur Auszahlung gelangen soll, ohne Rücksicht darauf, ob der Versicherte nach n Jahren noch am Leben ist oder nicht, so heißt diese Versicherungsart eine *Versicherung à terme fixe* oder eine *Versicherung mit festem Ablaufstermine* oder *mit bestimmter Verfallszeit.*

Bezeichnen wir den Wert einer derartigen Versicherung, die von dem Leben oder Sterben des Versicherten vollkommen unabhängig ist und deswegen eigentlich eine Sparversicherung vorstellt, auf die versicherte Kapitalseinheit mit $A_{\overline{n}|}$, so ist offenbar

$$A_{\overline{n}|} = v^n.$$

So ist beispielsweise für $n = 25$, wenn man $3^1/_2$ Prozent Zinseszinsen rechnet, nach Tabelle II

$$A_{\overline{25}|} = 0{\cdot}4231\,4699.$$

Würde man bei gleichem Prozentsatze und gleicher Versicherungsdauer die gemischte Versicherung für verschiedene Alter nach Tafel XII a berechnen, so findet man

$$A_{25,\overline{25}|} = 0{\cdot}460\,716, \qquad A_{35,\overline{25}|} = 0{\cdot}480\,838,$$

$$A_{30,\overline{25}|} = 0{\cdot}469\,493, \qquad A_{40,\overline{52}|} = 0{\cdot}496\,149,$$

$$A_{45,\overline{25}|} = 0{\cdot}517\,579;$$

das sind Werte, die nicht nur mit zunehmendem Alter selbst zunehmen, sondern auch durchwegs größer sind als $A_{\overline{25}|}$.

§ 51. *Sofort zahlbare Todesfallversicherungen.*

Bei den bis jetzt behandelten Todesfallversicherungen wird die Versicherungssumme immer am Schlusse jenes Versicherungsjahres ausbezahlt, in welchem der Tod des Versicherten eintritt.

Soll die Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben des Versicherten erfolgen, so berechnet man die einmalige Nettoprämie irgend einer Versicherungsart, z. B. der kurzen Todesfallversicherung auf ein Jahr, deren Wert wir für eine Kapitalseinheit mit ${}_m\bar{T}_x$ bezeichnen in der Weise, daß man annimmt, daß bei gleichmäßiger Verteilung der Sterbefälle während eines Jahres sämtlich d_{x+m} Personen in der Mitte des $(m+1)$ten Versicherungsjahres sterben. Die zur Auszahlung gelangende Summe d_{x+m} hat, auf den Beginn der Versicherung diskontiert, den Wert

$$d_{x+m}\, v^{m+\frac{1}{2}}.$$

Mithin entfällt auf eine Person

$${}_m\bar{T}_x = \frac{d_{x+m}\, v^{m+\frac{1}{2}}}{l_x}$$

oder, indem man Zähler und Nenner des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Bruches mit $v^{x+\frac{1}{2}}$ multipliziert,

$${}_m\bar{T}_x = \frac{d_{x+m}\, v^{x+m+1}}{v^{\frac{1}{2}}\, l_x\, v^x}.$$

Da aber nach Seite 131 $\frac{d_{x+m}\, v^{x+m+1}}{l_x\, v^x} = {}_mT_x$ ist, so erhält man

$${}_m\bar{T}_x = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\, {}_mT_x$$

oder

$${}_m\bar{T}_x = r^{\frac{1}{2}}\, {}_mT_x.$$

Nun ist aber

$$r^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+i} = 1 + \frac{i}{2} - \frac{i^2}{8} + \frac{i^3}{16} - \cdots\cdots$$

Für den Ausdruck $r^{\frac{1}{2}}$ kann, wenn man bei der Entwicklung die höheren Potenzen von i wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt, näherungsweise auch $\left(1+\frac{i}{2}\right)$ gesetzt werden.

Daher findet man

$$_m\bar{T}_x = \left(1+\frac{i}{2}\right) {}_m T_x.$$

Ebenso erhält man als einmalige Nettoprämie:

1. Für eine lebenslängliche Todesfallversicherung

$$\bar{A}_x = \left(1+\frac{i}{2}\right) A_x,$$

2. für eine um m Jahre aufgeschobene Todesfallversicherung

$$_{m|}\bar{A}_x = \left(1+\frac{i}{2}\right) {}_{m|}A_x,$$

3. für eine kurze Todesfallversicherung auf n Jahre

$$_n\bar{A}_x = \left(1+\frac{i}{2}\right) {}_nA_x$$

und 4. für eine gemischte Versicherung

$$\bar{A}_{x\overline{n}|} = {}_n\bar{A}_x + {}_nE_x$$

oder

$$\bar{A}_{x\overline{n}|} = \frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)(M_x - M_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x}$$

Beispiel.

1. Eine 30jährige Person will nach ihrem Tode ihren Erben ein Kapital von K 10.000·— hinterlassen. Wie groß ist die einmalige Nettoprämie, wenn die Versicherungsanstalt 3 Probejahre festsetzt und das versicherte Kapital sofort nach dem Tode des Versicherten dann auszahlt, wenn derselbe erst nach Ablauf der Karenzzeit eintritt?

In diesem Falle wendet man die Gleichung an

$$_{m|}\bar{A}_x = \left(1+\frac{i}{2}\right) \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

und man erhält nach Tafel X

$$_{3|}\bar{A}_{30} = 0{\cdot}374876.$$

Die Nettoprämie beträgt K 3.748·76.

2. Eine 25jährige Person will mit dem erreichten 60. Lebensjahre, d. i. 35. Jahre nach dem Versicherungsabschlusse ein Kapital von

K 10.000·— erhalten. Stirbt sie aber inzwischen, so sollen ihre Erben unmittelbar nach ihrem Tode diesen Betrag ausbezahlt bekommen. Wie groß ist die einmalige Nettoprämie, die sie dafür zu zahlen hätte?

Hier ist die Gleichung

$$\bar{A}_{x\overline{n}|} = \frac{\left(1+\frac{i}{2}\right)(M_x - M_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x}$$

anzuwenden und man erhält nach Tafel X

$$\bar{A}_{25,\overline{35}|} = 0{\cdot}435065.$$

Die 25jährige Person hätte dafür den Betrag von K 4.350·65 zu zahlen.

§ 52. *Veränderliche Todesfallversicherungen.*

Eine Todesfallversicherung, bei welcher das versicherte Kapital mit einem veränderlichen meist in arithmetischer Progression zu- oder abnehmenden Betrage zur Auszahlung gelangt, wird eine *veränderliche oder variable Todesfallversicherung* genannt.

1. Gelangt, wenn der Tod im ersten Versicherungsjahr eintritt, das Kapital k, wenn er im zweiten Jahre eintritt, das Kapital $k \pm \delta$, wenn er im dritten Jahre eintritt, das Kapital $k \pm 2\delta$ usw. und zwar am Ende des Sterbejahres zur Auszahlung, so hat diese *veränderliche lebenslängliche Todesfallversicherung*, wenn wir deren einmalige Nettoprämie mit $(vA)_x$ bezeichnen, als Summe der kurzen Todesfallversicherungen auf ein Jahr

$$k\,{}_0T_x,\quad (k\pm\delta)\,{}_1T_x,\quad (k\pm 2\,\delta)\,{}_2T_x,\quad \ldots\ldots\quad [k\pm(\omega-x)\,\delta]\,{}_{(\omega-x)}T_x$$

den Wert

$$(v\,A)_x = \frac{k_0\,C_x + (k\pm\delta)\,C_{x+1} + (k\pm 2\delta)\,C_{x+2} + \cdots\cdots + [k\pm(\omega-x)\delta]\,C_\omega}{D_x}$$

oder

$$(v\,A)_x = \frac{k(C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_\omega) \pm \delta\,[C_{x+1} + 2\,C_{x+2} + \cdots\cdots + (\omega-x)C_\omega]}{D_x}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \cdots\cdots + C_\omega &= M_{x+1},\\ + C_{x+2} + C_{x+3} + \cdots\cdots + C_\omega &= M_{x+2},\\ + C_{x+3} + \cdots\cdots + C_\omega &= M_{x+3},\\ &\vdots\\ C_\omega &= M_\omega. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man

$$C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \cdots + (\omega - x) C_\omega = M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_\omega$$

oder, wenn man *die Summe der Summen der diskontierten Zahlen der Toten*

$$M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_\omega = \Sigma M_{x+1} = R_{x+1}$$

setzt,

$$C_{x+1} + 2C_{x+2} + 3C_{x+3} + \cdots + (\omega - x) C_\omega = R_{x+1}.$$

Der Zähler

$$k(C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega) \pm \delta [C_{x+1} + 2C_{x+2} + \cdots + (\omega - x) C_\omega]$$

nimmt nunmehr die Form an

$k M_x \pm \delta R_{x+1}$ oder, wenn man darin für $R_{x+1} = R_x - M_x$ setzt,

$$(k \mp \delta) M_x \pm \delta R_x.$$

Folglich ist

$$(vA)_x = \frac{(k \mp \delta) M_x \pm \delta R_x}{D_x}.$$

Für $k = 1$ und $\delta = 1$ ergibt sich der Wert einer mit 1 beginnenden und jährlich um 1 steigenden lebenslänglichen Todesfallversicherung

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}.$$

2. Soll die veränderliche Todesfallversicherung nicht sofort, sondern erst nach m Jahren mit dem Betrage k beginnen und dann jährlich um den Betrag δ zu- oder abnehmen, so hat die um m Jahre *aufgeschobene veränderliche Todesfallversicherung* $_{m|}(vA)_x$ den Wert

$$_{m|}(vA)_x = \frac{k C_{x+m} + (k \pm \delta) C_{x+m+1} + \cdots + [k \pm (\omega - x)\delta] C_\omega}{D_x}$$

oder

$$_{m|}(vA)_x = \frac{(k \mp \delta) M_{x+m} \pm \delta R_{x+m}}{D_x}.$$

Für $k = 1$ und $\delta = 1$ geht die aufgeschobene lebenslänglich steigende Todesfallversicherung über in

$$_{m|}(IA)_x = \frac{R_{x+m}}{D_x}.$$

3. Für die mit k beginnende, jährlich um δ zu- oder abnehmende, mithin um δ *veränderliche kurze Todesfallversicherung* auf n Jahre, bei welcher die versicherte Summe nur in dem Falle ausbezahlt wird, als der Versicherte innerhalb der nächsten n Jahre nach dem Versicherungsabschlusse stirbt, ist die einmalige Nettoprämie

$$(vA)_{\overline{xn|}} = \frac{k C_x + (k \pm \delta) C_{x+1} + \cdots + [k \pm (n-1)\delta] C_{x+n-1}}{D_x}$$

oder

$$(vA)_{\overline{xn|}} = \frac{k(C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}) \pm \delta [C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + (n-1) C_{x+n-1}]}{D_x}$$

Nun ist aber

$$C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \cdots + C_{x+n-1} = M_{x+1} - M_{x+n},$$
$$C_{x+2} + C_{x+3} + \cdots + C_{x+n-1} = M_{x+2} - M_{x+n},$$
$$C_{x+3} + \cdots + C_{x+n-1} = M_{x+3} - M_{x+n},$$
$$\vdots$$
$$C_{x+n-1} = M_{x+n-1} - M_{x+n}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen bekommt man

$$C_{x+1} + 2C_{x+2} + \cdots + (n-1) C_{x+n-1} = $$
$$= M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_{x+n-1} - (n-1) M_{x+n}$$

oder

$$C_{x+1} + 2C_{x+2} + \cdots + (n-1) C_{x+n-1} =$$
$$= R_x - R_{x+n} - (M_x - M_{x+n}) - n M_{x+n}.$$

Folglich erhält man für diese Todesfallversicherung den Wert

$$(vA)_{\overline{xn|}} = \frac{k(M_x - M_{x+n}) \pm \delta [R_x - R_{x+n} - n M_{x+n} - (M_x - M_{x+n})]}{D_x}$$

oder

$$(vA)_{\overline{xn|}} = \frac{(k \mp \delta)(M_x - M_{x+n}) \pm \delta (R_x - R_{x+n} - n M_{x+n})}{D_x}.$$

Für $k = 1$ und $\delta = 1$ geht die kurze lebenslänglich steigende Todesfallversicherung über in

$$(IA)_{\overline{xn|}} = \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x}.$$

4. Für die um m Jahre *aufgeschobene kurze veränderliche Todesfallversicherung*, die wir mit $_{m|}(vA)_{\overline{xn|}}$ bezeichnen, ist der Wert

$$_{m|}(vA)_{\overline{xn|}} = \frac{k C_{x+m} + (k \pm \delta) C_{x+m+1} + \cdots + [k \pm (n-1)\delta] C_{x+m+n-1}}{D_x}$$

oder

$$_{m|}(vA)_{\overline{xn|}} = \frac{(k \mp \delta)(M_{x+m} - M_{x+m+n}) \pm \delta (R_{x+m} - R_{x+m+n} - n M_{x+m+n})}{D_x}.$$

Für $k = 1$ und $\delta = 1$ erhält man, im Falle die Todesfallversicherung eine steigende ist,

$$_m(\mathrm{I\,A})_{x\overline{n}|} = \frac{\mathrm{R}_{x+m} - \mathrm{R}_{x+m+n} - n\,\mathrm{M}_{x+m+n}}{\mathrm{D}_x}.$$

5. Beginnt die Todesfallversicherung mit dem Betrage k, verändert sie sich $(n-1)$mal bis zum $n$ten Jahre jährlich um den Betrag δ und bleibt dann mit dem bereits erreichten Betrage $k \pm (n-1)\,\delta$ *konstant*, so hat diese *veränderliche und dann konstant bleibende lebenslängliche Todesfallversicherung* $(v_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x$ den Wert

$$(v_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x = \frac{k\,\mathrm{C}_x + (k \pm \delta)\,\mathrm{C}_{x+1} + \cdots\cdots + [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{C}_{x+n-1} +}{\mathrm{D}_x}$$

$$\frac{+ [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{C}_{x+n} + \cdots\cdots + [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{C}_\omega}{\mathrm{D}_x}.$$

Nun kann man für den Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung den Wert

$$(k \mp \delta)\,(\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n}) \pm \delta\,(\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n} - n\,\mathrm{M}_{x+n}) + (k \mp \delta)\,\mathrm{M}_{x+n} \pm \delta\,n\,\mathrm{M}_{x+n}$$

oder nach entsprechender Reduktion den Wert

$$(k \mp \delta)\,\mathrm{M}_x \pm \delta\,(\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n})$$

setzen. Mithin erhält man

$$(v_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x = \frac{(k \mp \delta)\,\mathrm{M}_x \pm \delta\,(\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n})}{\mathrm{D}_x}.$$

Ist die Todesfallversicherung eine steigende, so erhält man für $k = 1$ und $\delta = 1$

$$(\mathrm{I}_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x = \frac{\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}.$$

6. Soll die unter Nr. 5 angeführte Todesfallversicherung eine *um m Jahre aufgeschobene* sein, so hat sie dann den Wert

$$_{m|}(v_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x = \frac{k\,\mathrm{C}_{x+m} + (k \pm \delta)\,\mathrm{C}_{x+m+1} + \cdots\cdots +}{\mathrm{D}_x}$$

$$\frac{+ [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{C}_{x+m+n-1} + \cdots\cdots + [k \pm (n-1)\,\delta]\,\mathrm{C}_\omega}{\mathrm{D}_x}$$

oder

$$_{m|}(v_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x \frac{(k \mp \delta)\,\mathrm{M}_{x+m} \pm \delta\,(\mathrm{R}_{x+m} - \mathrm{R}_{x+m+n})}{\mathrm{D}_x}.$$

Falls die Todesfallversicherung eine steigende ist, so erhält man für $k = 1$ und $\delta = 1$

$$_{m|}(\mathrm{I}_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x \frac{\mathrm{R}_{x+m} - \mathrm{R}_{x+m+n}}{\mathrm{D}_x}.$$

Beispiele.

1. Wie groß ist die einmalige Nettoprämie, die eine 30jährige Person für eine kurze steigende Todesfallversicherung auf 25 Jahre zahlen muß, wenn die Versicherungssumme mit *K* 10.000·— beginnt und jährlich um *K* 1.000·— steigt?

Unter Benützung der Gleichung

$$(v\,\mathrm{A})_{x\overline{n}|} = \frac{(k-\delta)\,(\mathrm{M}_x - \mathrm{M}_{x+n}) + \delta\,(\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n} - n\,\mathrm{M}_{x+n})}{\mathrm{D}_x}$$

und nach Einsetzung der entsprechenden Werte aus der Tafel X erhält man

$$(v\,\mathrm{A})_{30,\overline{25}|} =$$

$$= \frac{9000\,(14462{\cdot}15 - 8111{\cdot}07) + 1000\,(406695{\cdot}55 - 121854{\cdot}25 - 25 \times 8111{\cdot}07)}{36949}$$

oder

$$(v\,\mathrm{A})_{30,\overline{25}|} = 3.768{\cdot}011\,.$$

Die 30jährige Person müßte für diese Versicherung den einmaligen Betrag von *K* 3.768·01 zahlen.

2. Wie groß ist die Einmalprämie, die eine 30jährige Person für eine mit dem Betrage von *K* 10.000·— beginnende, 20mal jährlich um *K* 1.000·— steigende und dann mit dem erreichten Betrage von *K* 30.000·— verbleibende lebenslängliche Todesfallversicherung zahlen muß?

Wendet man die Gleichung an

$$(v_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x = \frac{(k-\delta)\,\mathrm{M}_x + \delta\,(\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n})}{\mathrm{D}_x},$$

so erhält man nach Tafel X

$$(v_{\overline{21}|}\mathrm{A})_{30} = \frac{9000\,.\,14462{\cdot}15 + 1000\,(406695{\cdot}55 - 156926{\cdot}90)}{36949}.$$

Die einmalige Nettoprämie beträgt in diesem Falle *K* 10.282·50.

3. Wie groß würde die Einmalprämie für eine veränderliche Todesfallversicherung sein, die eine 30jährige Person zahlen müßte, wenn die Versicherung mit *K* 1 000·— beginnt, jährlich um den gleichen Betrag, d. i. um *K* 1.000·— so lange steigt, bis sie den Betrag von *K* 30.000·— erreicht und dann auf dieser Höhe weiterhin verbleibt?

Unter Anwendung der Gleichung

$$(\mathrm{I}_{\overline{n}|}\mathrm{A})_x = \frac{\mathrm{R}_x - \mathrm{R}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}$$

findet man nach Tafel X.

$$(I_{\overline{30}|} A)_{30} = \frac{406695 \cdot 55 - 84036 \cdot 93}{36949} = 8 \cdot 732540 .$$

Die 30jährige Person würde für diese Art der Versicherung an Einmalprämie den Betrag von *K* 8.732·54 zahlen müssen.

3. Jahresprämien für Erlebens-, Renten- und Todesfallversicherungen.

§ 53. *Jährliche Prämienzahlung.*

Wir haben uns bisher bei der Berechnung der einzelnen Versicherungsarten auf die Voraussetzung gestützt, daß die Prämie beim Abschlusse der Versicherung auf einmal an die Versicherungsanstalt bezahlt wird. Gewöhnlich übersteigt jedoch die Bezahlung einer Einmalprämie die finanziellen Kräfte des Versicherungsnehmers, wonach dann in den meisten Fällen vereinbart wird, daß der Versicherte statt der Einmalprämie, jährlich gleichbleibende oder auch veränderliche Prämienbeträge zahlt, die *Jahresprämien* genannt werden.

Die Jahresprämien werden entweder lebenslänglich oder während eines im vorhinein bestimmten Zeitraumes z. B. von n Jahren, natürlich beim früheren Tode des Versicherten aufhörend, gewöhnlich *am Anfange eines jeden Jahres* gezahlt. Eine Prämienzahlung ist unzulässig, die erst anfängt, wenn schon eine Auszahlung möglicherweise stattfinden könnte.

Um die Jahresprämie, die wir für die versicherte Kapitalseinheit oder für die Renteneinheit mit P bezeichnen, zu finden, kann man sich die Versicherungsanstalt als Rentenempfängerin seitens des Versicherungsnehmers vorstellen. Würde der Versicherte der Versicherungsanstalt jährlich den Betrag von einer Kapitalseinheit als Prämie zahlen, so hätten diese Zahlungen am Tage des Versicherungsabschlusses den Wert a, welcher die Nettoprämie *einer lebenslänglichen* oder *kurzen Pränumerando-Leibrente* bedeutet. je nachdem die Zahlungen lebenslänglich oder nur durch eine bestimmte Anzahl von Jahren stattfinden; da aber der Versicherte jährlich die Prämie P zahlt, so haben diese Zahlungen beim Abschlusse der Versicherung den Wert P . a.

Da es jedoch gleich ist, ob der Versicherte an die Anstalt für die versicherte Kapitalseinheit oder Renteneinheit die Einmalprämie A oder jährlich die Prämie P zahlt, so muß der Wert P a offenbar gleich der Einmalprämie A sein.

Es ist mithin

$$P a = A,$$

woraus sich die Jahresprämie

$$P = \frac{A}{a}$$

ergibt.

Die Jahresprämie einer Versicherungsart wird also gefunden, indem man die Einmalprämie dieser Versicherungsart durch den Barwert einer lebenslänglichen oder kurzen Pränumerando-Leibrente dividiert, je nachdem die Jahresprämien lebenslänglich oder nur durch eine bestimmte Anzahl von Jahren gezahlt werden; dabei müssen die Werte a und A nach derselben Sterbetafel berechnet werden.

Wird die Jahresprämie in $m$teljährigen Raten gezahlt, so ist

$$P^{(m)} = \frac{A}{a^{(m)}},$$

worin $a^{(m)}$ eine kurze oder eine lebenslängliche unterjährige Pränumerando-Leibrente bedeutet.

§ 54. *Jahresprämien für die Erlebensversicherung und für die aufgeschobene Leibrente.*

1. Eine versicherte $x$jährige Person hat, um im *Erlebensfalle* nach m Jahren eine Kapitalseinheit zu erhalten, die Einmalprämie

$${}_m E_x = \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

zu bezahlen. Soll an Stelle dieses Betrages vom Versicherten eine jährliche Prämie, die man mit $P({}_m E_x)$ oder auch mit $P_{x\overline{m}|}^{\;1}$ bezeichnet, während der ganzen Versicherungsdauer von m Jahren gezahlt werden, so ist die Jahresprämie

$$P_{x\overline{m}|}^{\;1} = \frac{{}_m E_x}{{}_{|m} a_x}.$$

Nun ist aber

$${}_{|m} a_x = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

und daher

$$P_{x\overline{m}|}^{\;1} = \frac{D_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}.$$

2. Eine um m Jahre *aufgeschobene Leibrente* hat für die versicherte Renteneinheit den Wert

$${}_{m|} a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}.$$

Der Wert der Jahresprämie, die wir mit $P({}_{m|} a_x)$ oder auch kurz mit ${}_{m|} P_x$ bezeichnen, ist, wenn dieselbe während der ganzen Aufschubzeit gezahlt wird,

$${}_{m|}\mathrm{P}_x = \frac{{}_{m|}\mathrm{a}_x}{{}_{|m}\mathrm{a}_x}$$

oder

$${}_{m|}\mathrm{P}_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}.$$

Für eine *kurze aufgeschobene Leibrente* ist hingegen die Jahresprämie, die man mit $\mathrm{P}({}_{m|n}\mathrm{a}_x)$ oder mit ${}_{m|n}\mathrm{P}_x$ bezeichnet,

$${}_{m|n}\mathrm{P}_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m} - \mathbb{N}_{x+m+n}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}.$$

Beispiel.

1. Eine 32jährige Person will mit dem erreichten 55. Lebensjahre über ein Kapital von *K* 10.000·— verfügen. Wie viel wird sie dafür jährlich netto zu zahlen haben?

Findet die Zahlung der jährlichen Nettoprämie während der ganzen Aufschubzeit von 23 Jahren statt, so ist nach Tafel VIII

$${}_{23}\mathrm{P}_{32} = \frac{12265}{663603 - 167266} = 0{\cdot}024711.$$

Die 32jährige Person würde mithin jährlich den Betrag von *K* 247·11 zahlen.

Wenn jedoch die jährliche Zahlung der Prämie nicht während der ganzen Aufschubsdauer von *m* Jahren, sondern nur durch *n* Jahre, wobei natürlich $n < m$ ist, stattfindet, so ist in diesem Falle die Jahresprämie

$${}_{m}\mathrm{P}_x = \frac{\mathrm{D}_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}}.$$

Mithin wäre, wenn man annimmt, daß die Prämie jährlich nur durch 15 Jahre gezahlt wird, ebenfalls nach Tafel VIII

$${}_{23}\mathrm{P}_{32} = \frac{12265}{663603 - 289182} = 0{\cdot}032757$$

und die Prämie selbst gleich *K* 327·57.

2. Eine 30jährige Person will mit dem erreichten 60. Lebensjahre in den Genuß einer veränderlichen Leibrente gelangen, die mit *K* 2.000·— beginnen, durch 5 Jahre um je *K* 200·— steigen und dann mit dem erreichten Betrage von *K* 3.000·— lebenslänglich ausbezahlt werden soll. Wie groß wird die während der Aufschubzeit jährlich zu zahlende Nettoprämie sein?

In diesem Falle wäre die Einmalprämie

$${}_{m|}(v_{\overline{n}|}\mathrm{a})_x = \frac{(k-\delta)\,\mathbb{N}_{x+m} + \delta\,(\mathbb{S}_{x+m} - \mathbb{S}_{x+m+n})}{\mathrm{D}_x}$$

und die Jahresprämie

$$\mathrm{P}[{}_{m|}(v_{\overline{n}|}\mathrm{a})_x] = \frac{(k-\delta)\,\mathbb{N}_{x+m} + \delta\,(\mathbb{S}_{x+m} - \mathbb{S}_{x+m+n})}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}.$$

Mit Hilfe der Tafel VIII erhält man den numerischen Wert für die Jahresprämie

$$\mathrm{P}[{}_{30}(v_{\overline{6}|}\mathrm{a})_{30}] = \frac{(2000 - 200)\,\mathbb{N}_{60} + 200\,(\mathbb{S}_{60} - \mathbb{S}_{66})}{\mathbb{N}_{30} - \mathbb{N}_{60}} = 498{\cdot}247.$$

Die 30jährige Person müßte für diese Versicherung als Jahresprämie den Betrag von *K* 498·25 zahlen.

Würde sie jedoch mit dem erreichten 60. Lebensjahre in den Genuß einer konstanten Rente von *K* 3.000·— gelangen wollen, so müßte sie dafür nach § 40 jährlich an Prämie *K* 540·49 zahlen.

§ 55. *Jahresprämien für die Todesfallversicherungen.*

1. Wird die Jahresprämie für eine *lebenslängliche Todesfallversicherung,* die man mit $\mathrm{P}(\mathrm{A}_x)$ oder auch mit P_x bezeichnet, lebenslänglich gezahlt, so ist

$$\mathrm{P}_x = \frac{\mathrm{A}_x}{\mathrm{a}_x}$$

oder

$$\mathrm{P}_x = \frac{\mathrm{M}_x}{\mathbb{N}_x}.$$

Drückt man die Jahresprämie durch Rentenwerte aus, so erhält man

$$\mathrm{P}_x = \frac{1 - d\,\mathrm{a}_x}{\mathrm{a}_x}$$

oder

$$\mathrm{P}_x = \frac{1}{\mathrm{a}_x} - d.$$

Wählt man aber an Stelle der lebenslänglichen die *abgekürzte Prämienzahlung,* indem die Prämie nur durch eine bestimmte Anzahl von Jahren, natürlich mit dem Tode aufhörend, gezahlt wird, so tritt im Nenner an Stelle der lebenslänglichen die temporäre Leibrente.

Mithin ist die gesuchte Jahresprämie, die mit ${}_{n}\mathrm{P}_x$ bezeichnet wird,

$${}_{n}\mathrm{P}_x = \frac{\mathrm{A}_x}{{}_{|n}\mathrm{a}_x}$$

oder

$${}_{n}\mathrm{P}_x = \frac{\mathrm{M}_x}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}}.$$

2. Der Wert der Jahresprämie für eine um *m* Jahre *aufgeschobene Todesfallversicherung,* die wir mit $\mathrm{P}({}_{m|}\mathrm{A}_x)$ oder wie bei der aufgeschobenen Leibrente kurz mit ${}_{m}\mathrm{P}_x$ bezeichnen, findet man bei lebenslän-

licher Prämienzahlung durch die Division der Einmalprämie $_{m|}A_x$ durch die lebenslängliche Leibrente a_x.

Es ist also

$$_{m|}P_x = \frac{_{m|}A_x}{a_x}$$

oder

$$_{m|}P_x = \frac{M_{x+m}}{N_x}.$$

3. Bei der *kurzen* oder *temporären Todesfallversicherung* wird die Jahresprämie höchstens während der ganzen Dauer der Versicherung gezahlt. Beträgt die Versicherungsdauer n Jahre und stimmt dieselbe mit der Dauer der Prämienzahlungen überein, so ergibt sich für die Jahresprämie, die man mit $P(_{n}A_x)$ oder mit $P^1_{x\overline{n}|}$ oder auch mit $_nP_x$ bezeichnet, der Wert

$$P^1_{x\overline{n}|} = {_{|n}P_x} = \frac{_{|n}A_x}{_{|n}a_x}$$

oder

$$_nP_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

4. Die Jahresprämie für eine *gemischte Versicherung,* die man mit $P(A_{x\overline{n}|})$ oder mit $P_{x\overline{n}|}$ bezeichnet, wird in der Regel bis zur Fälligkeit des Erlebenskapitals gezahlt und hat mithin den Wert

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{_{|n}a_x}.$$

Nun ist aber

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = 1 - d\, _{|n}a_x,$$

mithin erhält man für die Jahresprämie den Wert

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

oder

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{1}{_{|n}a_x} - d.$$

5. Wird die Jahresprämie für die *Versicherung à terme fixe,* die man mit $P_{\overline{n}|}$ bezeichnet, bis zur Fälligkeit des versicherten Kapitals gezahlt, so ist ihr Wert

$$P_{\overline{n}|} = \frac{A_{\overline{n}|}}{_{|n}a_x}$$

oder

$$P_{\overline{n}|} = \frac{v^n D_x}{N_x - N_{x+n}}.$$

Beispiele.

1. Wie groß ist die Jahresprämie, die eine 35jährige Person lebenslänglich zu zahlen hat, um bei ihrem Tode den Erben ein Kapital von K 10.000·— zu hinterlassen?

Wendet man die Gleichung an

$$P_x = \frac{M_x}{N_x},$$

so erhält man nach Tafel XIII

$$P_{35} = \frac{10877{\cdot}79}{503732} = 0{\cdot}0215944.$$

Die jährliche Nettoprämie beträgt mithin K 215·94.

Werden die Prämien nur bis zum 55. Lebensjahre gezahlt, dann hätte man unter Anwendung der Gleichung

$$_nP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}}$$

und mit Benützung der Tafel XIII

$$_{20}P_{35} = \frac{10877{\cdot}79}{503732 - 126052} = 0{\cdot}0288016.$$

Mithin würde in diesem Falle die Jahresprämie K 288·02 betragen.

2. Welche Jahresprämie müßte eine 35jährige Person unter Festsetzung einer 3jährigen Karenzzeit lebenslänglich zahlen, um ihren Erben ein Kapital von K 10.000·— zu hinterlassen?

Hier wäre die Gleichung

$$_{m|}P_x = \frac{M_{x+m}}{N_x}$$

anzuwenden und man erhält mit Hilfe der Tafel XIII

$$_3P_{35} = \frac{10304{\cdot}72}{503732} = 0{\cdot}0204568.$$

Die jährliche Nettoprämie hätte mithin den Betrag von K 204·57.

3. Eine 35jährige Person geht eine kurze Todesfallversicherung auf 10 Jahre ein. Wie groß ist die jährliche Nettoprämie, wenn die Versicherungssumme K 10.000·— beträgt?

Unter Anwendung der Gleichung

$$_{|n}P_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

und mit Hilfe der Tafel XIII erhält man

$$_{|10}P_{35} = \frac{10877{\cdot}79 - 8847{\cdot}37}{503732 - 271578} = 0{\cdot}008746.$$

Die jährliche Nettoprämie beträgt mithin K 87·46.

4. Eine 35jährige Person will mit dem erreichten 55. Lebensjahre über ein Kapital von K 20.000·— verfügen. Stirbt sie aber innerhalb dieses Zeitraumes, d. i. vom 35. bis zum 55. Lebensjahre, so sollen in diesem Falle ihre Erben den Betrag von K 20.000·— erhalten. Wie groß ist die jährliche Nettoprämie, die sie dafür höchstens 20mal zu zahlen hätte?

Nach der Gleichung

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

und nach der Tafel XIII erhält man für

$$P_{35,\overline{20}|} = \frac{10877 \cdot 79 - 6426 \cdot 56 + 10689}{503732 - 126052} = 0 \cdot 0400875.$$

Die Jahresprämie beträgt mithin netto K 801·75.

5. Eine 35jährige Person will ihrem 5jährigen Kinde ein Kapital von K 10.000·— sichern, welches erst nach Ablauf von 15 Jahren unter allen Umständen ausgezahlt werden soll. Wie groß ist die Jahresprämie, die die versicherte Person dafür höchstens 15mal zu entrichten hat.

Hier beträgt die jährliche Nettoprämie für die versicherte Kapitalseinheit

$$P_{\overline{n}|} = \frac{v^n D_x}{N_x - N_{x+n}}$$

und mit Benützung der Tabellen II und XIII

$$P_{\overline{15}|} = \frac{0 \cdot 59689062 \times 27913}{503732 - 198521} = 0 \cdot 0545884.$$

Für die versicherte Summe von K 10.000·— beträgt die Jahresprämie K 545·88.

Wenn die versicherte Person ein nach 15 Jahren fälliges Kapital von K 10.000·— statt bei einer Versicherungsanstalt bei einer Sparkasse für das Kind sichern will, so muß sie jährlich durch 15 Jahre am Anfange eines jeden Jahres den Betrag x zahlen, den man aus folgender Gleichung berechnen kann.

Es ist

$$x r^n + x r^{n-1} + \cdots\cdots + x r = K,$$

woraus folgt, daß

$$x = \frac{K}{s_{\overline{n}|}}$$

ist.

Für $K = K$ 10.000·—, $n = 15$ und $p = 3^1/_2$ Prozent erhält man für x den Wert von K 500·73.

Die versicherte Person müßte jährlich K 500·73 zahlen, um ihrem Kinde nach Ablauf von 15 Jahren ein Kapital von K 10.000·— sichern zu

können. Sie würde also, wie man sieht, bei der Sparkasse jährlich einen um K 45·15 geringeren Betrag zahlen als bei einer Versicherungsanstalt, dabei aber den Nachteil haben, daß im Falle ihres vorzeitigen Ablebens am Fälligkeitstage nicht der volle Betrag von K 10.000·—, sondern nur die Summe der bis zum Tode gezahlten und bis zum Fälligkeitstermine aufgezinsten Beträge ausbezahlt wird.

4. Einmalige und jährliche Brutto- oder Tarifprämien.

§ 56. *Netto- und Bruttoprämie.*

Beträge, welche die Versicherten einer Versicherungsanstalt für die mit ihnen abgeschlossenen Versicherungen zahlen und welche die rechtliche Grundlage des Versicherungsvertrages bilden, nennt man *Brutto-* oder *Tarifprämien,* während jene Beträge, welche dazu und nur dazu bestimmt sind, Fonds zu bilden, die gerade ausreichen, alle Auszahlungen der Versicherungsanstalt an die Versicherten unter der Annahme zu decken, daß das Sterben unter den Versicherten genau nach den gewählten Sterblichkeitstafeln erfolgt und die verzinsten Kapitalien stets den vorausgesetzten Zins tragen, *Nettoprämien* genannt werden.

Es schließen z. B. alle im Alter von 90 Jahren laut Tafel X lebenden 1273 Personen eine lebenslängliche Todesfallversicherung auf eine Kapitalseinheit gegen jährliche Prämienzahlung von K 0·34318 ab. Der durch die erste Zahlung der Prämien gebildete Fonds beträgt

$$K\ 0 \cdot 34318 \times 1273 = K\ 436 \cdot 8681.$$

Dieser Fonds wächst im Laufe des ersten Jahres um die 3prozentigen Zinsen per K 13·1060 auf K 449·9741 und wird durch die Auszahlung von K 402·— an die Hinterbliebenen der 1273 — 871 = 402 Gestorbenen auf K 47·9741 reduziert. Dieses reduzierte Kapital von K 47·9741 bildet mit den Prämienzahlungen der 871 Überlebenden, d. i. mit K 298·9098 zusammen den Fonds von K 346·8839 am Anfange des zweiten Jahres, welcher um die 3prozentigen Zinsen per K 10·4065 vermehrt auf K 354·2904 anwächst, um dann durch die Schadenauszahlung von K 296·— auf K 61·2904 zu sinken.

Derart fortfahrend erhält man am Schlusse des 12. Jahres einen Fonds von K 1·—, welcher nun gerade dazu reicht, um den Hinterbliebenen des letzten Gestorbenen die Versicherungssumme von einer Krone auszuzahlen.

Aus folgender Tabelle kann entnommen werden:

die Gebarung einer lebenslänglichen Todesfallversicherung gegen Zahlung der Jahresprämie von *K* 0·34318.

Versicherungsjahre (1)	Fonds am Anfange des Jahres (2)	Prämieneinnahme (3)	Summe aus (2) und (3) (4)	3prozentige Zinsen (5)	Fonds vor Auszahlung der Schadenssumme. Summe aus (4) und (5) (6)	Schadenzahlung (7)	Fonds am Ende des Jahres (8)
1	0·0000	436·8681	436·8681	13·1060	449·9741	402	47·9741
2	47·9741	298·9098	346·8839	10 4065	357·2904	296	61·2904
3	61·2904	197·3285	258·6189	7·7586	266·3775	209	57·3775
4	57·3775	125·6039	182·9814	5·4894	188·4708	144	44·4708
5	44·4708	76·1860	120 6568	3·6198	124·2766	93	31·2766
6	31·2766	44·2702	75·5468	2·2664	77·8132	58	19·8132
7	19·8132	24·3658	44·1790	1·3254	45·5044	34	11·5044
8	11·5044	12·6977	24·2021	0·7262	24·9283	18	6·9283
9	6·9283	6·5204	13·4487	0·4036	13·8523	10	3·8523
10	3·8523	3·0886	6·9409	0·2083	7·1492	5	2·4492
11	2·1492	1·3727	3·5219	0·1057	3·6276	3	0·6276
12	0·6276	0·3432	0·9708	0·0292	1·0000	1	0·0000
		1227·5549		45·4451		1273	

Addiert man zu den Prämieneinnahmen von *K* 1.227·5549 die angewachsenen Zinsen von *K* 45·4451, so erhält man zur Summe die Schadenzahlung von *K* 1.273·—.

Wie man sieht, gibt die vorstehende Tabelle ziffermäßig den Nachweis, daß die eingezahlten Prämien samt ihren Zinsen jenen Betrag geben, die die versicherte Summe vollkommen deckt, natürlich unter der Voraussetzung, daß das Absterben nach der Sterbetafel erfolgt und daß die Prämieneinnahmen auch den vorausgesetzten Zins tragen.

Nun ist aber die Sterblichkeit wie auch der Zinsfuß Schwankungen unterworfen. Man wählt daher Tafeln, die der Wirklichkeit am nächsten liegen und welche die Sicherheit bieten, daß die Sterblichkeit unter den Versicherten bei Todesfallversicherungen geringer, bei Erlebens- und Leibrentenversicherungen jedoch höher als nach der Tafel zu erwarten ist *(Sterblichkeitsgewinn)*. Den Zinsfuß bestimmt man wieder in der Weise, daß die verzinsten Prämien einen höheren als den vorausgesetzten Zins tragen *(Zinsgewinn)*.

Es haben aber die Versicherungsanstalten aus ihren Prämieneinnahmen nicht nur die vertragsmäßig bedungenen Versicherungsleistungen, sondern auch noch die mit dem Betriebe verbundenen *Geschäftsunkosten* zu decken, welche sich wieder in zwei Gruppen einteilen lassen, die der *Erwerb* und die *Verwaltung der Versicherung* verursachen.

Zu der *ersten Gruppe*, zu den *Erwerbskosten*, die eine *einmalige*

Ausgabe bedingen und die mit 1 bis 4 Prozent des versicherten Kapitals oder mit 30 bis 60 Prozent der Jahresprämie berechnet werden, gehören in erster Linie die *Erwerbs-* oder *Abschlußprovisionen*, welche dem Agenten für die Vermittlung des Antrages gezahlt werden, ferner *Ärztehonorare*, *Reisekosten* usf.

Zu der *zweiten Gruppe*, zu den *Verwaltungskosten*, gehören die *dauernden* Unkosten, wie Gehälter, Mieten, Steuern, Annoncen, Inkassoprovisionen, welche die Agenten für die Einziehung der Prämien erhalten etc. und die bei Jahresprämien mit 10 bis 15 Prozent der Nettoprämien bemessen werden.

Zur Bestreitung dieser Auslagen werden die Nettoprämien durch einen *Zuschlag* erhöht.

Die so erhöhten Prämien werden, wie bereits erwähnt, *Brutto- oder Tarifprämien* (office premium) *genannt*.

Bezeichnen wir die einmaligen Unkosten der Versicherungsanstalt, bezogen auf die Einheit der Versicherungssumme mit λ und nehmen wir an, daß die dauernden Unkosten proportional der Nettoprämie $\varkappa A$ sind, so stellt sich die für die versicherte Kapitalseinheit mit A' bezeichnete Bruttoprämie als Summe aus der Nettoprämie und aus den einmaligen und dauernden Unkosten.

Es ist mithin

$$A' = A + \lambda + \varkappa A$$

oder

$$A' = (1 + \varkappa) A + \lambda.$$

Die Größen $\varkappa$ und λ sind im allgemeinen vom Beitrittsalter und der Versicherungsdauer abhängig und werden bei verschiedenen Anstalten verschiedenartig gewählt. Viele Versicherungsanstalten setzen λ proportional der Bruttoprämie. Somit hat, wenn man $\lambda = \varkappa' A'$ setzt, obige Gleichung die Form

$$A' = (1 + \varkappa) A + \varkappa' A'$$

oder

$$A' = \frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa'} A.$$

Bei lebenslänglicher Todesfallversicherung kann z. B. für das Beitrittsalter von 30 Jahren $\frac{1 + \varkappa}{1 - \varkappa'} = \frac{11}{10} = 1·1$ gesetzt werden.

Man erhält mithin

$$A' = 1·1 A.$$

Der Aufschlag beträgt in diesem Falle 10 Prozent der Nettoprämie.

Die jährliche Bruttoprämie, die wir für die versicherte Kapitalseinheit mit P' bezeichnen, hat den Wert

$$P' = \frac{A'}{a}$$

oder, wenn wir darin $A' = \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} A$ setzen,

$$P' = \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} \frac{A}{a}$$

oder auch, da $Pa = A$ ist

$$P' = \frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} P.$$

Bei einem Beitrittsalter von 25 Jahren kann man z. B. für die lebenslängliche Todesfallversicherung

$$\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa} = 1\cdot2$$

und mithin für

$$P' = 1\cdot2\, P$$

setzen.

Hier wäre daher der Aufschlag zur Nettoprämie 20 Prozent derselben.

Nicht alle Tarife haben einen und denselben Zuschlag. Derselbe muß vielmehr für jeden Tarif und für jede Gruppe von Tarifen einzeln festgestellt werden.

In manchen Fällen, wie z. B. bei kurzen Todesfallversicherungen, ist es im Interesse der Aufrechthaltung der Versicherung geboten, die Abschlußprovision nicht auf einmal auszuzahlen, sondern, was auch gesetzlich gestattet ist, deren Zahlung auf einige Jahre zu verteilen.

Beispiele.

1. Eine 34jährige Person will mit dem erreichten 60. Lebensjahre in den Genuß einer lebenslänglichen Leibrente von *K* 3.000·— gelangen. Wie groß ist die einmalige und wie groß die jährliche Bruttoprämie, wenn 8, beziehungsweise 15 Prozent der Nettoprämie als Regiezuschlag gerechnet werden?

Unter Anwendung der Gleichungen

$$_{m|}a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} \quad \text{und} \quad _{m|}P_x = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}$$

und nach Tafel VIII erhält man

$$_{26}a_{34} = 3\cdot72733, \qquad _{26|}P_{34} = 0\cdot228955.$$

Folglich ist

$$_{26|}a'_{34} = 1\cdot08 \times 3\cdot72733 = 4\cdot02551$$

und

$$_{26}P'_{34} = 1\cdot15 \times 0\cdot228955 = 0\cdot263299.$$

Die Tarifprämie beträgt *K* 12.076·53, beziehungsweise *K* 789·90; die Nettoprämie dagegen *K* 11.181·99, beziehungsweise *K* 686·87.

Wird die Tarifprämie statt jährlich in halbjährlichen, vierteljährlichen oder monatlichen Raten gezahlt, so pflegt man in der Praxis wegen Zinsenentganges bei halbjährlicher Ratenzahlung die Hälfte der um $1^1/_4$ bis 2 Prozent, bei vierteljährlicher Ratenzahlung den vierten Teil der um 2 bis 3 Prozent und bei monatlicher Zahlung den zwölften Teil der um $2^1/_2$ bis 4 Prozent erhöhten Jahresprämie zu nehmen.

So betragen in diesem Falle bei halb-, vierteljährlicher, beziehungsweise monatlicher Zahlung und beim niedrigsten Prozentsatze die entsprechenden Raten *K* 399·89, *K* 201·42, beziehungsweise *K* 67·47.

2. Eine 35jährige Person geht eine lebenslängliche Todesfallversicherung auf *K* 10.000·— ein. Wie groß ist die einmalige und wie groß die jährliche Bruttoprämie, wenn 10, beziehungsweise 20 Prozent der Nettoprämie als Regiezuschlag gerechnet werden?

Unter Zugrundelegung der Gleichungen

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \quad \text{und} \quad P_x = \frac{M_x}{N_x}$$

ist nach Tafel XIII

$$A_{35} = 0\cdot389703 \qquad \text{und} \qquad P_{35} = 0\cdot021594.$$

Mithin ist

$$A'_{35} = 1\cdot1 \times 0\cdot389703 = 0\cdot428673$$

und

$$P'_{35} = 1\cdot2 \times 0\cdot021594 = 0\cdot025913.$$

Die Tarifprämien betragen *K* 4.286·73 und *K* 259·13; die Nettoprämien dagegen *K* 3.897·03 und *K* 215·94.

5. Versicherungen mit Prämienrückgewähr.

§ 57. *Begriff der Prämienrückgewähr.*

Alle Versicherungsarten, wie die Leibrenten- und Todesfallversicherungen, lassen sich in zwei Hauptgruppen einteilen und zwar in Versicherungen, bei denen die Versicherungssumme *unbedingt* zur Auszahlung gelangt, wie z. B. bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung, bei der gemischten Versicherung usf. und in solche Versicherungen, bei denen die Versicherungssumme nur *bedingt* ausbezahlt wird, wo also die Auszahlung nur dann stattfindet, wenn das versicherte Ereignis eintrifft, wie z. B. bei der Erlebensversicherung, bei der aufgeschobenen Leibrente, bei der kurzen Todesfallversicherung usw.

Bei den Versicherungsarten der zweiten Gruppe können im Falle

des Nichteintreffens des versicherten Ereignisses unter gewissen Bedingungen sämtliche eingezahlten Prämien oder Teile derselben gegen Zahlung einer Zusatzprämie zurückerstattet werden. Diese Kombination nennt man eine *Versicherung mit Prämienrückgewähr.* Es werden ausschließlich nur *Bruttoprämien* oder *Teile derselben unverzinst* oder *einfach verzinst* zurückgezahlt, da Nettoprämien nur eine rein interne Verwendung haben und im Verkehre mit dem Versicherten gar nicht zum Ausdrucke kommen.

Es kann vorkommen, daß man auch Versicherungen der ersten Gruppe gegen Prämienzahlung mit Rückgewähr der Prämien abschließt; in solchen Fällen kann dann oft eine solche Versicherung den Charakter der Versicherung ganz verlieren.

Bei der Berechnung der Nettoprämie für eine Versicherung mit Prämienrückgewähr geht man von dem Prinzip der Gleichheit der Leistung und Gegenleistung aus, selbstverständlich bezogen auf den Tag des Versicherungsabschlusses.

Da jedoch nur die Nettoprämie zur Deckung der Versicherung und der Prämienrückgewähr dient, so kommen bei der Bestimmung der Leistung des Versicherten nur die Nettoprämien mit Rückgewähr in Betracht, während bei der Bestimmung der Gegenleistung, d. i. bei der Leistung der Versicherungsanstalt, nur Bruttoprämien mit Rückgewähr angewendet werden.

§ 58. *Erlebensversicherung mit Prämienrückgewähr.*

1. *Bei Zahlung der Einmalprämie.* Eine $x$jährige Person versichert sich auf eine Kapitalseinheit, die ihr mit dem erreichten $(x+m)$ten Lebensjahre unter der Bedingung ausgezahlt werden soll, daß für den Fall, als sie vor Erreichung des $(x+m)$ten Lebensjahres stirbt, die *einmalige Prämie* ihren Erben rückerstattet wird.

Bezeichnet man die einmalige Nettoprämie dieser Versicherungskombination mit E, die diesbezügliche Bruttoprämie mit

$$E' = \alpha E,$$

wobei α den Brutto- oder Tarifzuschlag bedeutet, so besteht, bezogen auf den Tag des Versicherungsabschlusses, die Leistung des Versicherten in der Nettoprämie E und die Leistung der Versicherungsanstalt in der Summe der Barwerte aus der Auszahlung der Erlebensversicherung, d. i. aus ${}_mE_x$ und aus der kurzen Todesfallversicherung auf den Betrag E' d. i. aus ${}_{|m}A_x \cdot E'$.

Mithin ist nach dem Grundsatze, daß die Leistung gleich der Gegenleistung ist,

$$E = \frac{D_{x+m}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x} \cdot E'$$

oder, da

$$E = \frac{E'}{\alpha}$$

ist

$$E' D_x = \alpha D_{x+m} + E' \alpha (M_x - M_{x+m}),$$

woraus man erhält

$$E' = \frac{\alpha D_{x+m}}{D_x - \alpha (M_x - M_{x+m})}.$$

Diese Berechnung setzt voraus, daß, wenn die Prämie E' ausgezahlt werden sollte, deren Zahlung am Schlusse des Sterbejahres stattfindet. Die Differenz zwischen E und ${}_mE_x$ stellt die Zusatzprämie für die Rückgewähr vor.

2. *Bei Zahlung von Jahresprämien.* Eine $x$jährige Person versichert sich auf eine Kapitalseinheit, die ihr mit dem erreichten $(x-m)$ten Lebensjahre unter der Bedingung ausgezahlt werden soll, daß für den Fall, als sie vor Erreichung des $(x+m)$ten Lebensjahres stirbt, die bereits gezahlten *Jahresprämien* ihren Erben rückerstattet werden.

Wenn man die jährliche Nettoprämie dieser kombinierten Versicherung mit π und die zugehörige Bruttoprämie mit

$$\pi' = \alpha' \pi$$

bezeichnet, so besteht in diesem Falle, bezogen auf den Tag des Versicherungsabschlusses, die Leistung des Versicherten in dem Barwerte seiner Prämienzahlungen, d. i. in ${}_{|m}a_x \cdot \pi$ und die Leistung der Versicherungsanstalt in der Summe der Barwerte aus der Auszahlung der Erlebensversicherung, d. i. aus ${}_mE_x$ und aus der kurzen steigenden Todesfallversicherung mit dem Anfangsbetrage π' und einer gleich großen Steigerung, d. i. aus $(IA)_{x\overline{m|}} \cdot \pi'$. Es ist mithin

$$\frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}{D_x} \pi = \frac{D_{x+m}}{D_x} + \frac{R_x - R_{x+m} - m M_{x+m}}{D_x} \pi'$$

oder, wenn man darin $\pi = \frac{\pi'}{\alpha'}$ setzt

$$(\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}) \pi' = \alpha' D_{x+m} + (R_x - R_{x+m} - m M_{x+m}) \alpha' \pi'$$

und woraus sich

$$\pi' = \frac{\alpha' D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m} - \alpha' (R_x - R_{x+m} - m M_{x+m})}$$

ergibt.

Will man in dieser Gleichung als Grundwerte nur die diskontierten Zahlen der Lebenden haben, so verwandelt man den Klammerausdruck, der die diskontierten Zahlen der Toten enthält, in einen Ausdruck mit diskontierten Zahlen der Lebenden und zwar erhält man, da $M_x = D_x - d\,\mathbb{N}_x$,

$$R_x = \Sigma M_x = \Sigma D_x - d\,\Sigma \mathbb{N}_x = \mathbb{N}_x - d\,\mathbb{S}_x$$

und $R_{x+m} = \mathbb{N}_{x+m} - d\,\mathbb{S}_{x+m}$ ist, für

$$R_x - R_{x+m} - mM_{x+m} = \mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m} - mD_{x+m} - d\,(\mathbb{S}_x - \mathbb{S}_{x+m} - m\mathbb{N}_{x+m}).$$

Beispiel.

Eine 26jährige Person will mit dem erreichten 60. Lebensjahr einen Betrag von K 10.000·— erhalten. Stirbt sie inzwischen, so sollen die bereits gezahlten Prämien ihren Erben zufallen. Wie groß ist die einmalige und wie groß die jährliche Prämie, die sie dafür zu zahlen hat, wenn 10, beziehungsweise 16 Prozent Zuschlag gerechnet werden?

Die Einmalprämie erhält man nach der Gleichung

$$E' = \frac{\alpha D_{x+m}}{D_x - \alpha(M_x - M_{x+m})}$$

und nach Tafel XII*a*

$$E' = \frac{1{\cdot}1 \times 7.879{\cdot}2}{38403 - 1{\cdot}1\,(11605{\cdot}10 - 4955{\cdot}84)} = 0{\cdot}278786.$$

Die Jahresprämie dagegen ergibt sich aus der Gleichung

$$\pi' = \frac{\alpha' D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m} - \alpha'(R_x - R_{x+m} - mM_{x+m})}$$

und man bekommt nach Tafel XII*a*

$$\pi' = \frac{1{\cdot}16 \times 7879{\cdot}2}{792465 - 864484 - 1{\cdot}16\,(349040{\cdot}64 - 61551{\cdot}59 - 34 \times 4955{\cdot}84)} = 0{\cdot}015944.$$

Die versicherte Person müßte an Einmalprämie den Betrag von K 2.787·86 und an Jahresprämie den Betrag von K 159·45 zahlen. Würde die betreffende Person sich ohne Rückgewähr der Prämie versichern, so müßte sie als einmalige Bruttoprämie nach der Gleichung

$${}_nE'_x = \alpha\,\frac{D_{x+m}}{D_x}$$

den Betrag von K 2.256·89 und als jährliche Bruttoprämie nach der Gleichung

$${}_nP'_x = \alpha'\,\frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}$$

den Betrag von K 129·46 zahlen.

Wenn die 26jährige Person nach 34 Jahren statt bei einer Versicherungsanstalt bei einer Sparkasse die Summe von $K = K$ 10.000·— beheben will, so müßte sie während dieser Zeit jährlich am Anfange eines jeden Jahres bei 3½prozentiger Verzinsung einen Betrag x zahlen, den man aus Gleichung

$$xr^m + xr^{m-1} + \cdots\cdots + xr = K$$

oder aus

$$x\,s_{\overline{m|}} = K$$

und mit Hilfe der Tabelle III leicht berechnen kann. Es ist

$$x = 10000 : 65{\cdot}67401274 = 152{\cdot}267.$$

Die betreffende Person müßte jährlich in die Sparkasse den Betrag von K 152·27 zahlen, um nach Ablauf von 34 Jahren über ein Kapital von K 10.000·— zu verfügen; stirbt sie früher, so bekommen die Erben die eingezahlten Beträge samt deren Zinseszinsen ausbezahlt. Bei der Versicherungsanstalt zahlt sie jährlich den höheren Betrag von K 159·45 und im Falle ihres frühzeitigen Todes bekommen ihre Erben nur die eingezahlten Prämien allein ohne Zinsen rückerstattet. Daher ist es von rein wirtschaftlichem Standpunkte aus betrachtet, eine solche Versicherungskombination abzuschließen, nicht empfehlenswert.

§ 59. *Aufgeschobene Leibrente.*

1. *Bei Zahlung der Einmalprämie.* Erwirbt eine $x$jährige Person eine um m Jahre aufgeschobene lebenslängliche Leibrente gegen Zahlung einer einmaligen Prämie mit Rückgewähr derselben, wenn innerhalb der Aufschubzeit deren Tod eintritt, so findet man, wenn man die Nettoprämie dieser Versicherungskombination mit ${}_{m|}a$ und die zugehörige Bruttoprämie mit ${}_{m|}a' = \alpha\,{}_{m|}a$ bezeichnet, in analoger Weise wie bei der Erlebensversicherung die Ansatzgleichung

$${}_{m|}a = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+m}}{D_x}\cdot {}_{m|}a',$$

woraus sich, wenn man darin

$${}_{m|}a = \frac{{}_{m|}a'}{\alpha}$$

setzt, der Wert für die Bruttoprämie ${}_{m|}a'$ leicht berechnen läßt. Es ist

$${}_{m|}a = \frac{\alpha\,\mathbb{N}_{x+m}}{D_x - \alpha\,(M_x - M_{x+m})}.$$

Auch in diesem Falle wird vorausgesetzt, daß die Rückzahlung der Prämie ${}_{m|}a'$ am Schlusse des Sterbejahres erfolgt. Die Differenz zwischen ${}_{m|}a$ und ${}_{m|}a_x$ gibt die Zusatzprämie für die Rückgewähr.

2. *Bei Zahlung von Jahresprämien.* Erwirbt eine $x$jährige Person eine um m Jahre aufgeschobene lebenslängliche Leibrente gegen Zahlung von Jahresprämien während der Aufschubsdauer und Rückgewähr der eingezahlten Prämien im Falle ihres vorzeitigen Todes, so erhält man, wenn man die für die ganze Leistung entfallende Nettoprämie mit ${}_{m|}\pi$ und die zugehörige Bruttoprämie mit

$${}_{m}\pi' = \alpha'\, {}_{m}\pi$$

bezeichnet, in analoger Weise, wie bei der Erlebensversicherung, die Ansatzgleichung

$$\frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}\, {}_{m|}\pi = \frac{N_{x+m}}{D_x} + \frac{R_x - R_{x+m} - m\, M_{x+m}}{D_x} \cdot {}_{m}\pi'.$$

Setzt man darin ${}_{m}\pi = \frac{{}_{m}\pi'}{\alpha'}$, so bekommt man

$$(N_x - N_{x+m})\, {}_{m|}\pi' = \alpha' N_{x+m} + (R_x - R_{x+m} - m\, M_{x+m})\, \alpha'\, {}_{m|}\pi',$$

woraus folgt, daß die Prämie

$${}_{m|}\pi' = \frac{\alpha' N_{x+m}}{N_x - N_{x+m} - \alpha' (R_x - R_{x+m} - m\, M_{x+m})}$$

ist.

Beispiel.

Eine 20jährige Person möchte mit dem erreichten 55. Lebensjahre in den Genuß einer lebenslänglichen Leibrente von K 3.000·— gelangen. Wie groß ist, wenn die eingezahlten Prämien zurückerstattet werden, die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn 10, beziehungsweise 16 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden?

Unter Anwendung der Gleichung

$${}_{m|}a' = \frac{\alpha N_{x+m}}{D_x - \alpha (M_x - M_{x+m})}$$

und nach Tafel XIIa, erhält man für die Einmalprämie den Wert

$${}_{35}a' = \frac{1{\cdot}1 \times 133670}{48474 - 1{\cdot}1\,(12726{\cdot}38 - 6020{\cdot}64)} = 3{\cdot}57774\,.$$

Die Einmalprämie beträgt mithin K 10.733·22.

Wendet man die Gleichung

$${}_{m|}\pi' = \frac{\alpha' N_{x+m}}{N_x - N_{x+m} - \alpha' (R_x - R_{x+m} - m\, M_{x+m})}$$

an, so erhält man, nach Tafel XIIa für die Jahresprämie den Wert

$${}_{35|}\pi' = \frac{1{\cdot}16 \times 133670}{1057111 - 133670 - 1{\cdot}16(422583{\cdot}16 - 89548{\cdot}76 - 35\,.\,6020{\cdot}64)} = 0{\cdot}198395$$

Die Jahresprämie hätte den Betrag von K 595·19.

Dieselbe Versicherung hätte unter den gleichen Bedingungen jedoch ohne Prämienrückgewähr für die Einmalprämie nach der Gleichung

$${}_{m|}a_x' = \frac{\alpha N_{x+m}}{D_x}$$

den Wert von K 9.099·95, während für die Jahresprämie nach der Gleichung

$${}_{m}P_x' = \frac{\alpha' N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}$$

sich der Wert von K 503·74 ergeben würde.

§ 60. *Kurze Todesfallversicherung.*

1. *Bei Zahlung der Einmalprämie.* Eine $x$jährige Person schließt eine kurze, n Jahre dauernde Todesfallversicherung auf die Kapitalseinheit ab, mit der Bedingung, daß ihr im Falle, als sie das $(x+n)$te Lebensjahr erreicht, die gezahlte Einmalprämie rückerstattet werde.

Bezeichnet man die einmalige Nettoprämie dieser kombinierten Versicherung mit ${}_{|n}A$ und die zugehörige Bruttoprämie mit

$${}_{|n}A' = \alpha\,.\,{}_{|n}A,$$

so besteht, auf den Tag des Versicherungsabschlusses bezogen, die Leistung der Versicherungsanstalt aus dem Barwerte der kurzen Todesfallversicherung, d. i. aus ${}_{|n}A_x$ und aus dem Barwerte der ihr gezahlten und nach n Jahren fälligen Prämie ${}_{|n}A'$, d. i. aus ${}_{|n}A'\,.\,{}_{n}E_x$, während die Leistung des Versicherten aus der Zahlung der Prämie ${}_{|n}A$ besteht. Mithin ist

$${}_{|n}A = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot {}_{|n}A'$$

und man erhält, wenn man darin

$${}_{|n}A = \frac{{}_{|n}A'}{\alpha}$$

setzt,

$${}_{|n}A'\,.\,D_x = \alpha\,(M_x - M_{x+n}) + D_{x+n}\,\alpha\,.\,{}_{|n}A',$$

woraus sich die Prämie

$${}_{|n}A' = \frac{\alpha (M_x - M_{x+n})}{D_x - \alpha D_{x+n}}$$

ergibt.

2. *Bei Zahlung von Jahresprämien.* Wird die jährliche Nettoprämie, welche die $x$jährige Person für diese kurze Todesfallversicherung auf n Jahre zahlt, mit ${}_{|n}\pi$ und die zugehörige Bruttoprämie mit

$${}_{|n}\pi' = \alpha'\, {}_{|n}\pi$$

bezeichnet, so ist, bezogen auf den Tag des Versicherungsabschlusses, die Leistung der versicherten Person der Barwert ihrer Prämienzahlungen, d. i. ${}_{n}a_x\,.\,{}_{|n}\pi$, während die Leistung der Versicherungsanstalt aus dem Barwerte der kurzen Todesfallversicherung auf n Jahre, d. i. aus ${}_{|n}A_x$ und aus dem Barwerte der n gezahlten Prämien ${}_{|n}\pi'$, d. i. aus $n\,.\,{}_{|n}\pi'\,{}_{n}E_x$ besteht.

Es ist mithin

$$\frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}}{D_x}\,{}_{|n}\pi = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + n\,.\,{}_n\pi'\,\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

woraus man dann, wenn wir darin

$${}_{|n}\pi = \frac{{}_n\pi'}{\alpha'}$$

setzen, den Wert für die Prämie

$${}_n\pi' = \frac{\alpha'(M_x - M_{x+n})}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n} - n\,\alpha'\,D_{x+n}}$$

erhält.

Diese Versicherungskombination gibt, wenn die Versicherungsdauer kurz ist, sehr hohe und bei sehr kurzer Versicherungsdauer sogar negative Jahresprämien.

Beispiel.

Eine 35jährige Person geht eine kurze Todesfallversicherung auf 10 Jahre ein, mit der Bedingung, daß ihr mit dem erreichten 45. Lebensjahre die gezahlten Prämien rückerstattet werden. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn die Versicherungssumme *K* 10.000·— beträgt und ein Regieaufschlag von 7, beziehungsweise 10 Prozent gerechnet wird?

Nach der Gleichung

$${}_{|n}A' = \frac{\alpha(M_x - M_{x+n})}{D_x - \alpha\,D_{x+n}}$$

und nach Tafel XIII erhält man

$${}_{10}A' = \frac{1·07\,(10877·79 - 8847·37)}{27913 - 1·07 \times 18031} = 0·252041.$$

Die versicherte Person zahlt den Betrag von *K* 2.520·41.

Die Jahresprämie findet man nach der Gleichung

$${}_{|n}\pi' = \frac{\alpha'(M_x - M_{x+n})}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n} - n\,\alpha'\,D_{x+n}}.$$

Es ist also

$${}_n\pi' = \frac{1·1\,(10877·79 - 8847·37)}{503732 - 271578 - 10 \times 1·1 \times 18031} = 0·066053$$

und die jährliche Prämie beträgt mithin *K* 660·53. Die versicherte Person erhält in diesem Falle, wenn sie das 45. Lebensjahr erreicht, den Betrag von *K* 6.605·30 ausgefolgt; sollte sie früher sterben, so bekommen ihre Erben am Schlusse ihres Sterbejahres *K* 10.000·—.

IV. ABSCHNITT.

Berechnung der Prämienreserven für einfache Leben.

1. Prämienreserve für Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung.

§ 61. *Begriff und Berechnung der Prämienreserve.*

Eine Versicherungsanstalt ist verpflichtet, die von den Versicherten geleisteten Nettoprämien zurückzulegen und alljährlich um die auf sie entfallenden Zinsen zu vermehren. Die Anstalt würde bald ihre Zahlungen einstellen, wenn sie, vorausgesetzt, daß alle Versicherten einmalige Prämien gezahlt hätten, den ganzen Überschuß der Prämieneinnahmen über die Auszahlungen als Gewinn verteilen würde. Eine Zahlungsunfähigkeit würde, nur in einem geringeren Maße, auch bei jährlicher Prämienzahlung eintreten. Versichert sich jemand durch Zahlung einer einmaligen oder jährlichen Prämie, so hat die Versicherungsanstalt gegenüber dem Versicherten eine Schuld, die nicht ein Jahr währt, sondern erst mit dem Fälligkeitstermin oder mit seinem Tode endigt.

Wenn z. B. sich jemand gegen eine lebenslängliche jährliche Prämienzahlung auf den Todesfall versichert, so zahlt derselbe in den ersten Versicherungsjahren zu viel, dagegen in den späteren Jahren zu wenig, als das jährliche Risiko es erfordert. Es muß daher das anfänglich zu viel Erhobene für das Risiko späterer Jahre von der Versicherungsanstalt stets entsprechend verzinst und reserviert werden. Es geschieht dies bei jeder Versicherungsanstalt durch jährliche Zurückstellung der für jede Versicherung berechneten Reserven.

Der Wert der Prämienreserve einer einzelnen Versicherung ist mithin das *jeweilige Deckungskapital* der Versicherten, dividiert durch

die Zahl der zum Zeitpunkte der Berechnung von ihnen noch lebenden Personen.

Wenn die Sterblichkeit den verwendeten Sterbetafeln entsprechend verläuft, der bei der Berechnung der Tarife vorausgesetzte Zinsfuß tatsächlich erzielt wird, kein willkürliches Austreten versicherter Personen stattfindet und die bei der Berechnung der Bruttoprämien vorausgesetzten Unkosten nicht überschritten werden, so ist die *Prämienreserve gleich der Differenz der zum Zeitpunkte der Berechnung bereits geleisteten Einzahlungen und der bereits erfolgten Auszahlungen.*

Die auf diese Weise definierte Prämienreserve heißt die *retrospektive Prämienreserve;* sie greift auf die Vergangenheit zurück.

Ziehen wir die künftigen Einnahmen und Auslagen in Betracht, so ist *die Prämienreserve gleich der Differenz der zur selben Zeit noch zu erwartenden Auszahlungen und der noch zu gewärtigenden Einnahmen.*

Wir nennen dieselbe, da sie sich auf die Betrachtung zukünftiger Verhältnisse stützt, die *prospektive Prämienreserve.*

Addiert man die Prämienreserven der einzelnen Versicherungen, so erhält man die Prämienreserve der *Gesamtheit.*

Der Ausdruck ${}_sE_x$, der gleich $\frac{D_{x+s}}{D_x}$ ist, stellt jene einmalige Prämie vor, die eine $x$jährige Person einer Versicherungsanstalt zahlen muß, um nach s Jahren von derselben eine Kapitalseinheit zu erhalten.

$\frac{D_{x+s}}{D_x}$ *ist,* analog dem Abzinsungsfaktor v^s, *der Barwert einer nach s Jahren fälligen Kapitalseinheit, die eine jetzt x Jahre alte Person mit dem erreichten $(x+s)$ten Lebensjahre erhält.*

Zahlt jedoch die versicherte $x$jährige Person eine Einheit, so erhält sie nach s Jahren, falls sie noch am Leben ist, den Betrag $\frac{D_x}{D_{x+s}}$ ausbezahlt.

Es wächst also eine Kapitalseinheit nach s Jahren bei Berücksichtigung der Verzinsung und der Erlebenswahrscheinlichkeit auf

$$\frac{D_x}{D_{x+s}}$$

an und entspricht in der Zinseszinsrechnung dem Aufzinsungsfaktor r^s.

$\frac{D_x}{D_{x+s}}$ *ist mithin der Endwert einer Kapitalseinheit nach Ablauf von s Jahren für eine jetzt x Jahre alte Person beim erreichten $(x+s)$ten Lebensjahre.*

Die einmalige Nettoprämie A, die eine $x$jährige Person beim Abschlusse irgend einer Versicherungsart zahlt, hat s Jahre nach Abschluß der Versicherung den Wert

$$\frac{D_x}{D_{x+s}} A.$$

Bezeichnet B den gegenwärtigen Wert aller Auszahlungen der Versicherungsanstalt, welche dieselbe an den Versicherten während der Zeit von seinem $x$ten bis zu seinem $(x+s)$ten Lebensjahre geleistet hat, so wächst dieser Wert B nach s Jahren auf

$$\frac{D_x}{D_{x+s}} B$$

an.

Die Prämienreserve nach der retrospektiven Methode hat s Jahre nach dem Abschlusse irgend einer Versicherungsart, wenn wir dieselbe mit ${}_sV_x$ bezeichnen, mithin den Wert

$${}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} (A - B).$$

Bei einmaliger Prämienzahlung ist zur Zeit der Reserveberechnung, die s Jahre nach dem Versicherungsabschlusse stattfindet, die zukünftige Zahlung seitens des Versicherten gleich Null. Daher hat *nach der prospektiven Methode die Prämienreserve,* wenn wir den Barwert den zukünftigen Zahlungen der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung, also s Jahre nach dem Abschlusse der Versicherung, mit C bezeichnen, den Wert

$${}_sV_x = C.$$

Berücksichtigt man, daß C, auf den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses bezogen, den Wert

$$\frac{D_{x+s}}{D_x} C$$

hat und daß der Wert der Prämienzahlung gleich sein muß dem Werte der von der Anstalt zu leistenden Zahlungen, also

$$A = B + \frac{D_{x+s}}{D_x} C,$$

so ergibt sich

$$\frac{D_x}{D_{x+s}} (A - B) = C.$$

Diese Gleichung besagt, daß die nach beiden Methoden gefundenen Prämienreserven einander gleich sind.

Die prospektive Methode der Prämienreserveberechnung ist die gebräuchlichere; die retrospektive Methode wird insbesondere bei Versicherungen mit Prämienrückgewähr und ferner dann angewendet, wenn der gegenwärtige Wert der Leistungen der Versicherungsanstalt bis zum Zeitpunkte der Reserveberechnung den Wert Null hat.

§ 62. *Prämienreserve für Erlebens- und Leibrentenversicherungen.*

1. *Erlebensversicherung.*

Die einmalige Prämie, die eine $x$jährige Person zahlt, um nach m Jahren im Erlebensfalle die Einheit zu erhalten, ist

$$A = {}_mE_x = \frac{D_{x+m}}{D_x}.$$

Für $s < m$ ist der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt

$$B = 0.$$

Mithin ist die Prämienreserve nach s Jahren

$${}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

oder

$${}_sV_x = \frac{D_{x+m}}{D_{x+s}}.$$

Für $s = m$ ist

$${}_sV_x = \frac{D_{x+s}}{D_{x+s}} = 1.$$

Die Reserve ist im Augenblicke der Auszahlung, wie es auch sein muß, gleich der Einheit.

So erhält man z. B. für $x = 35$, $m = 25$ und $s = 5$ nach Tafel VIII

$${}_5V_{35} = \frac{9421{\cdot}2}{23694} = 0{\cdot}397620,$$

ebenso für $s = 10$

$${}_{10}V_{35} = \frac{9421{\cdot}2}{19314} = 0{\cdot}487791,$$

für $s = 15$

$${}_{15}V_{35} = \frac{9421{\cdot}2}{15536} = 0{\cdot}606411,$$

für $s = 20$

$${}_{20}V_{35} = \frac{9421{\cdot}2}{12265} = 0{\cdot}768137$$

und für $s = 25$

$${}_{25}V_{35} = \frac{9421{\cdot}2}{9421{\cdot}2} = 1.$$

Beträgt die Versicherungssumme K 10.000·—, so ist die Reserve nach 5, 10, 15, 20, beziehungsweise nach 25 Jahren gleich K 3.976·20, K 4.877·91, K 6.064·11, K 7.681·37, beziehungsweise K 10.000·—.

2. *Lebenslängliche Leibrente.*

Die Einmalprämie, die eine $x$jährige Person für eine Pränumerando-Leibrente zahlt, ist

$$A = a_x = \frac{\mathbb{N}_x}{D_x}.$$

Der Barwert der Leistung der Versicherungsanstalt bildet eine kurze Pränumerando-Leibrente und ist

$$B = {}_{|s}a_x = \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x},$$

während die zukünftige Leistung der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung

$$C = a_{x+s}$$

ist.

Die Prämienreserve nach der *retrospektiven* Methode ist mithin

$${}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}}\left(\frac{\mathbb{N}_x}{D_x} - \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x}\right)$$

oder

$${}_sV_x = \frac{\mathbb{N}_{x+s}}{D_{x+s}} = a_{x+s},$$

welchen Wert man auch erhält, wenn man die Reserve nach der *prospektiven* Methode berechnet.

Die Prämienreserve für eine Kapitalseinheit kann man daher für jedes Alter direkt aus der Tafel in der Kolonne a_x entnehmen.

3. *Aufgeschobene Leibrente.*

Für eine um m Jahre aufgeschobene Pränumerando-Leibrente ist die Einmalprämie

$$A = {}_m a_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x}.$$

Ist $s < m$, so ist der Wert der Leistung der Versicherungsgesellschaft

$$B = 0,$$

während die zukünftige Leistung, bezogen auf den Zeitpunkt der Reservebestimmung, den Wert hat

$$C = {}_{m-s}a_{x+s} = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_{x+s}}.$$

Mithin ist die Reserve nach der *retrospektiven* Methode

$${}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \cdot \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x}$$

oder

$${}_sV_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_{x+s}}.$$

Nach der *prospektiven* Methode erhält man ebenfalls

$$ {}_sV_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_{x+s}}. $$

Ist jedoch $s > m$, so bildet die Leistung der Versicherungsanstalt bis zum Zeitpunkte der Reserveberechnung eine um m Jahre aufgeschobene und durch $(s-m)$ Jahre dauernde kurze Pränumerando-Leibrente, deren gegenwärtiger Wert

$$ B = {}_{m|s-m}a_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m} - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x} $$

ist.

Die zukünftige Leistung der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reservebestimmung, bildet eine lebenslängliche Pränumerando-Leibrente mit dem Werte

$$ C = a_{x+s}. $$

Nach der *retrospektiven* Methode ist mithin die Reserve

$$ {}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}}\left(\frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x} - \frac{\mathbb{N}_{x+m} - \mathbb{N}_{x-s}}{D_x}\right) $$

oder

$$ {}_sV_x = \frac{\mathbb{N}_{x+s}}{D_{x+s}}. $$

Nach der *prospektiven* Methode erhält man dieselbe Reserve. So findet man beispielsweise für $x = 35$, $m = 25$ und $s = 15$

$$ {}_{15}V_{35} = \frac{111768\cdot 3}{15536} = 7\cdot 1953 $$

und für $s = 30$

$$ {}_{30}V_{35} = \frac{69772\cdot 9}{6942\cdot 2} = 10\cdot 0505. $$

Beträgt die Rente *K* 3.000·—, so ist die Reserve nach 15, beziehungsweise 30 Jahren *K* 2.158·59, beziehungsweise *K* 3.015·15.

4. *Temporäre Leibrente.*

Bei dieser Versicherung ist die Einmalprämie

$$ A = {}_{|n}a_x = \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}}{D_x} $$

und der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt für $s < n$

$$ B = {}_{|s}a_x = \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x}. $$

Die zukünftige Leistung der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung, bildet eine kurze Pränumerando-Leibrente mit dem Werte

$$ C = {}_{|n-s}a_{x+s} = \frac{\mathbb{N}_{x+s} - \mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+s}}. $$

Nach *beiden* Methoden erhält man nach s Jahren für die Reserve

$$ {}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}}\left(\frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}}{D_x} - \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x}\right) $$

oder

$$ {}_sV_x = \frac{\mathbb{N}_{x+s} - \mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+s}}. $$

Für $x = 35$, $n = 10$ und $s = 6$ erhält man

$$ {}_6V_{35} = \frac{412761 - 327010}{22768} = 3\cdot 7663. $$

Ist die kurze Leibrente gleich *K* 1.000·—, so beträgt die Reserve nach 6 Jahren *K* 3.766·30.

§ 63. *Prämienreserve für Todesfallversicherungen.*

1. *Lebenslängliche Todesfallversicherung.*

In diesem Falle beträgt die einmalige Nettoprämie

$$ A = A_x = \frac{M_x}{D_x}. $$

Der Barwert der Leistung der Versicherungsanstalt ist eine kurze Todesfallversicherung mit dem Werte

$$ B = {}_{|s}A_x = \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x}, $$

während der Wert der zukünftigen Leistungen, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung,

$$ C = A_{x+s} = \frac{M_{x+s}}{D_{x+s}} $$

ist.

Die Reserve ist nach *beiden* Methoden

$$ {}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}}\left(\frac{M_x}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x}\right) $$

oder

$$ {}_sV_x = \frac{M_{x+s}}{D_{x+s}} = A_{x+s}. $$

So ist beispielsweise für $x = 30$ und $s = 5$, 10, 15, beziehungsweise für $s = 20$ nach Tafel XI, die für jedes Alter die entsprechenden Werte von A_x enthält,

$$ {}_{5}V_{30} = 0{\cdot}4009508, $$

$$ {}_{10}V_{30} = 0{\cdot}4435818, $$

$$ {}_{15}V_{30} = 0{\cdot}4906633 $$

und

$$ {}_{20}V_{30} = 0{\cdot}5428570. $$

Beträgt die Versicherungssumme z. B. *K* 10.000·—, so ist die Prämienreserve nach

5 Jahren *K* 4.009·51,

10 „ *K* 4.435·82,

15 „ *K* 4.906·63

und nach 20 „ *K* 5.428·57.

2. *Aufgeschobene Todesfallversicherung.*

Die einmalige Nettoprämie für eine um m Jahre aufgeschobene Todesfallversicherung ist

$$ A = {}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}. $$

Der Barwert der Leistung der Versicherungsanstalt ist für $s < m$

$$ B = 0. $$

Die zukünftige Leistung C, bezogen auf den Zeitpunkt der Reservebestimmung, bildet eine um $(m - s)$ Jahre aufgeschobene Todesfallversicherung mit dem Werte

$$ C = {}_{m-s}A_{x+s} = \frac{M_{x+m}}{D_{x+s}}. $$

Man erhält sowohl nach der *retrospektiven* als auch nach der *prospektiven* Methode die Reserve

$$ {}_{s}V_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \cdot \frac{M_{x+m}}{D_x} $$

oder

$$ {}_{s}V_x = \frac{M_{x+m}}{D_{x+s}}. $$

Für $s > m$ bildet die Leistung der Versicherungsanstalt bis zum Zeitpunkte der Reserveberechnung eine aufgeschobene kurze Todesfallversicherung, deren Barwert

$$ B = {}_{m|s-m}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+s}}{D_x} \text{ ist.} $$

Der Wert der zukünftigen Leistung der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung, ist

$$ C = A_{x+s} = \frac{M_{x+s}}{D_{x+s}}. $$

Nach beiden Methoden erhält man für die Reserve nach s Jahren den Wert

$$ {}_{s}V_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \left(\frac{M_{x+m}}{D_x} - \frac{M_{x+m} - M_{x+s}}{D_x} \right) $$

oder

$$ {}_{s}V_x = \frac{M_{x+s}}{D_{x+s}} = A_{x+s}. $$

Beträgt z. B. $x = 35$, $m = 5$ und $s = 3$, beziehungsweise $s = 10$, so erhält man nach Tafel XIII

$$ {}_{3}V_{35} = \frac{9906{\cdot}82}{24621} = 0{\cdot}402373 $$

und

$$ {}_{10}V_{35} = \frac{8847{\cdot}37}{18031} = 0{\cdot}490676. $$

Ist beispielsweise die Versicherungssumme gleich *K* 10.000·—, so beträgt die Prämienreserve während der Karenzzeit nach 3 Jahren *K* 4.023·73 und nach 10 Jahren *K* 4.906·76.

3. *Temporäre Todesfallversicherung.*

Für die temporäre Todesfallversicherung ist die Einmalprämie

$$ A = {}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. $$

Der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt ist

$$ B = {}_{|s}A_x = \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x}. $$

Der Wert der zukünftigen Leistung der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung, ist

$$ C = {}_{|m-s}A_{x+s} = \frac{M_{x+s} - M_{x+m}}{D_{x+s}}. $$

Mithin ist die Reserve nach *beiden* Methoden

$$ {}_{s}V_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \left(\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x} \right) $$

oder

$$ {}_{s}V_x = \frac{M_{x+s} - M_{x+n}}{D_{x+s}}. $$

Ist beispielsweise $x=35$, $n=10$ und $s=5$, so erhält man nach Tafel XIII

$$_5V_{35}=\frac{9906\cdot82-8847\cdot37}{22593}=0\cdot046893.$$

Bei einer Versicherungssumme von *K* 10.000·— beträgt die Prämienreserve nach 5 Jahren *K* 468·93.

4 *Gemischte Versicherung.*

Die einmalige Nettoprämie für eine gemischte Versicherung ist

$$A=A_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}.$$

Der Barwert der Leistung der Versicherungsanstalt bis zum Zeitpunkte der Reservebestimmung ist

$$B={}_{|s}A_x=\frac{M_x-M_{x+s}}{D_x}.$$

Die zukünftige Leistung, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung, hat für $s<n$ den Wert

$$C={}_{|n-s}A_{x+s}+{}_{n-s}E_{x+s}$$

oder

$$C=\frac{M_{x+s}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+s}}.$$

Mithin ist nach *beiden* Methoden die Reserve

$${}_sV_x=\frac{D_x}{D_{x+s}}\left(\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}-\frac{M_x-M_{x+s}}{D_x}\right)$$

oder

$${}_sV_x=\frac{M_{x+s}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+s}}.$$

So ist beispielsweise für $x=35$, $n=25$ und $s=10$ nach Tafel XII*a*

$$_{10}V_{35}=\frac{8003\cdot01-4955\cdot84+7879\cdot2}{17281}=0\cdot632276$$

und ebenso für $s=25$

$$_{25}V_{35}=\frac{4955\cdot84-4955\cdot84+7879\cdot2}{7879\cdot2}=1.$$

Beträgt die Versicherungssumme *K* 10.000·—, so ist die Prämienreserve nach 10 Jahren gleich *K* 6.322·76 und nach 25 Jahren, also am Tage der Auszahlung *K* 10.000·—.

2. Prämienreserve für Versicherungen mit jährlicher Prämienzahlung.

§ 64. *Berechnung der Prämienreserve.*

Zahlt eine $x$jährige Person für eine Versicherung welcher Art immer die Jahresprämie P und ist ${}_{|s}a$ eine Rente, die sich vom Tage des Versicherungsabschlusses bis zum Tage der Reserveberechnung erstreckt, an welchem die versicherte Person ein Alter von $(x+s)$ Jahren erreicht, so bildet das Produkt $P\,.\,{}_{|s}a$ den gegenwärtigen Wert A aller Zahlungen seitens des Versicherten bis zum Zeitpunkte der Reservebestimmung. Um diesen Wert $A=P_{|s}a$ auf den Zeitpunkt der Prämienreserveberechnung zu beziehen, muß man ihn noch mit $\frac{D_x}{D_{x+s}}$, welcher Bruch den Aufzinsungsfaktor mit Berücksichtigung des Prozentsatzes und der Erlebenswahrscheinlichkeit darstellt, multiplizieren.

Es hat also s Jahre nach dem Versicherungsabschlusse die Leistung $A=P_{|s}a$ den Wert

$$\frac{D_x}{D_{x+s}}A \qquad \text{oder} \qquad \frac{D_x}{D_{x+s}}\cdot P\,.\,{}_{|s}a.$$

Ist B der Barwert aller Zahlungen der Versicherungsanstalt, welche in die Zeitperiode vom $x$ten bis zum $(x+s)$ten Lebensjahre fallen, so ist derselbe, auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung bezogen, gleich

$$\frac{D_x}{D_{x+s}}\cdot B.$$

Die *Prämienreserve* nach der *retrospektiven Methode* ist mithin

$${}_sV_x=\frac{D_x}{D_{x+s}}(P_{|s}a-B).$$

Stellt a_s den Wert einer lebenslänglichen Leibrente vor, die erst mit dem Alter von $(x+s)$ Jahren beginnt, so gibt das Produkt $P\,.\,a_s$ den Wert der auf den Tag der Reserveberechnung bezogenen künftigen Prämienzahlungen. Wenn C, auf denselben Zeitpunkt bezogen, den Wert aller künftigen Zahlungen der Versicherungsanstalt vorstellt, so ist die *Reserve* nach der *prospektiven Methode* als der Überschuß der künftigen Auszahlungen über die künftigen Einnahmen

$${}_sV_x=C-P\,.\,a_s.$$

Zahlt der Versicherte die Jahresprämien in Raten, und zwar in $m$teljährlichen Raten, so hat man statt P die für die Ratenzahlung erhöhte Jahresprämie $P^{(m)}$ zu nehmen und die Leibrentenwerte ${}_{|s}a$ und a_s durch ${}_{|s}a^{(m)}$ und $a_s^{(m)}$ zu ersetzen. In der Praxis rechnet man aber die Prämien-

reserve des geringfügigen Unterschiedes wegen so, als wenn der Versicherte volle Jahresprämien gezahlt hätte.

§ 65. *Prämienreserve für Erlebens- und Leibrentenversicherungen.*

1. *Erlebensversicherung.*

Hier ist die Jahresprämie

$$P = P_{x\overline{m}|}^{\;1} = \frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}.$$

Der Barwert der Leistung der Versicherungsanstalt ist im Falle, daß $s < m$ ist,

$$B = 0.$$

Der Wert der künftigen Zahlungen der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung, ist

$$C = {}_{m-s}E_{x+s} = \frac{D_{x+m}}{D_{x+s}},$$

während die Renten ${}_{|s}a$ und a_s die Werte

$${}_{|s}a = {}_{|s}a_x = \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x} \quad \text{und} \quad a_s = {}_{|m-s}a_{x+s} = \frac{\mathbb{N}_{x+s} - \mathbb{N}_{x+m}}{D_{x+s}}$$

haben.

Mithin ist die Prämienreserve nach der *retrospektiven Methode*

$${}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \cdot \frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}} \cdot \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x}$$

oder

$${}_sV_x = \frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}} : \frac{D_{x+s}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}.$$

Da wir aber

$$\frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}} = P_{x\overline{m}|}^{\;1} \quad \text{und} \quad \frac{D_{x+s}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}} = P_{x\overline{s}|}^{\;1}$$

setzen können, so ist

$${}_sV_x = \frac{P_{x\overline{m}|}^{\;1}}{P_{x\overline{s}|}^{\;1}}.$$

Die Prämienreserve erscheint hier als *der Quotient zweier Jahresprämien für eine durch m, beziehungsweise durch s Jahre dauernden Erlebensversicherung.*

Nach der *prospektiven* Methode ist die Reserve

$${}_sV_x = \frac{D_{x+m}}{D_{x+s}} - \frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}} \cdot \frac{\mathbb{N}_{x+s} - \mathbb{N}_{x+m}}{D_{x+s}}$$

oder

$${}_sV_x = \frac{D_{x+m}}{D_{x+s}}\left(1 - \frac{\mathbb{N}_{x+s} - \mathbb{N}_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}\right)$$

oder auch

$${}_sV_x = \frac{D_{x+m}}{D_{x+s}} \cdot \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}$$

und endlich

$${}_sV_x = \frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}} : \frac{D_{x+s}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}},$$

welche Gleichung, ebenso wie bei der retrospektiven Methode, auf die Form

$${}_sV_x = \frac{P_{x\overline{m}|}^{\;1}}{P_{x\overline{s}|}^{\;1}}$$

gebracht werden kann.

So erhält man beispielsweise für $x = 35$, $m = 25$ und $s = 10$, 20, beziehungsweise $s = 25$ zunächst nach Tafel VIII

$$P_{35,\overline{25}|}^{\;1} = \frac{9421{\cdot}2}{570040 - 111786{\cdot}3} = 0{\cdot}0205589,$$

$$P_{35,\overline{10}|}^{\;1} = \frac{19314}{570040 - 327010} = 0{\cdot}0794717,$$

$$P_{35,\overline{20}|}^{\;1} = \frac{12265}{570040 - 167266} = 0{\cdot}0304513$$

und dann die entsprechenden Reserven

$${}_{10}V_{35} = \frac{P_{35,\overline{25}|}^{\;1}}{P_{35,\overline{10}|}^{\;1}} = \frac{0{\cdot}0205589}{0{\cdot}0794717} = 0{\cdot}258695$$

$${}_{20}V_{35} = \frac{P_{35,\overline{25}|}^{\;1}}{P_{35,\overline{20}|}^{\;1}} = \frac{0{\cdot}0205589}{0{\cdot}0304513} = 0{\cdot}675140$$

und

$${}_{25}V_{35} = \frac{P_{35,\overline{25}|}^{\;1}}{P_{35,\overline{25}|}^{\;1}} = 1.$$

Beträgt die Versicherungssumme K 10.000·—, so ist die Prämienreserve bei einer jährlichen Prämienzahlung von K 205·59, nach 10 Jahren K 2.586·95, nach 20 Jahren K 6.751·40 und nach 25 Jahren, also am Tage der Fälligkeit, K 10.000·—.

2. *Aufgeschobene Leibrente.*

Die Jahresprämie der um m Jahre aufgeschobenen Leibrente ist

$$P = {}_{m|}P_x = \frac{{}_{m|}a_x}{{}_{|m}a_x} = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m}}.$$

Der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt ist im Falle, wenn $s < m$ ist,

$$B = 0.$$

Der Wert der künftigen Zahlungen der Versicherungsanstalt ist für $s < m$, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung,

$$C = {}_{m-s}a_{x+s} = \frac{N_{x+m}}{D_{x+s}}.$$

Die Renten ${}_{|s}a$ und a_s haben die Werte

$${}_{|s}a = {}_{|s}a_x = \frac{N_x - N_{x+s}}{D_x} \quad \text{und} \quad a_s = {}_{|m-s}a_{x+s} = \frac{N_{x+s} - N_{x+m}}{D_{x+s}}.$$

Nach der *retrospektiven* Methode erhält man für die Reserve den Wert

$${}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \cdot \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{N_x - N_{x+s}}{D_x}$$

oder

$${}_sV_x = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} : \frac{D_{x+s}}{N_x - N_{x+s}}$$

oder endlich

$${}_sV_x = \frac{{}_mP_x}{P_{x,\frac{1}{s}|}},$$

welchen Wert man auch nach der *prospektiven* Methode bekommt.

Für $s > m$ bleibt die Prämie P unverändert, während der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt bis zum Zeitpunkte der Reserveberechnung

$$B = {}_{m\,s-m}a_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+s}}{D_x}$$

ist.

Der Wert der zukünftigen Zahlungen der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung, ist

$$C = a_{x+s} = \frac{N_{x+s}}{D_{x+s}}.$$

Die Renten ${}_{|s}a$ und a_s haben die Werte

$${}_sa = {}_ma_x = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} \quad \text{und} \quad a_s = 0.$$

Berechnet man die Reserve nach der *ersten* Art, so erhält man

$${}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \left\{ \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} - \frac{N_{x+m} - N_{x+s}}{D_x} \right\}$$

oder

$${}_sV_x = \frac{N_{x+s}}{D_{x+s}} = a_{x+s},$$

zu welchem Werte man auch unmittelbar nach der *zweiten* Art gelangt.

So findet man z. B. für $x = 35$, $m = 30$ und $s = 10, 20, 30$, beziehungsweise $s = 35$ Jahre, zunächst nach Tafel VIII

$${}_{30|}P_{35} = \frac{69772{\cdot}9}{570040 - 69772{\cdot}9} = 0{\cdot}139471,$$

$$P_{35,\frac{1}{10}|} = \frac{19314}{570040 - 327010} = 0{\cdot}079472,$$

$$P_{35,\frac{1}{20}|} = \frac{12265}{570040 - 167266} = 0{\cdot}030451$$

und

$$P_{35,\frac{1}{30}|} = \frac{6942{\cdot}2}{570040 - 69772{\cdot}9} = 0{\cdot}013877$$

und dann die Prämienreserve für 10, 20 und 30 Jahre

$${}_{10}V_{35} = \frac{0{\cdot}139471}{0{\cdot}079472} = 1{\cdot}755,$$

$${}_{20}V_{35} = \frac{0{\cdot}139471}{0{\cdot}030451} = 4{\cdot}580,$$

$${}_{30}V_{35} = \frac{0{\cdot}139471}{0{\cdot}013877} = 10{\cdot}051,$$

während die Reserve für 35 Jahre direkt aus der Tafel entnommen werden kann.

Denn es ist

$${}_{35}V_{35} = \frac{N_{70}}{D_{70}} = a_{70} = 8{\cdot}285.$$

Beträgt z. B. die Rente *K* 1.000·—, so ist die Jahresprämie *K* 139·47 und die Prämienreserve:

	nach	10 Jahren	*K*	1.755·—,
	„	20 „	*K*	4.580·—,
	„	30 „	*K*	10.051·—
und	„	35 „	*K*	8.285·—.

Wie man sieht, nimmt die Prämienreserve bis zum 30. Versicherungsjahre zu, in welchem sie ihr Maximum von *K* 10.051·— erreicht, um von da an, wo der Versicherte bereits im Genusse der Rente steht, stetig abzunehmen.

3. *Lebenslängliche Todesfallversicherung.*

In diesem Falle ist die lebenslänglich zu zahlende Jahresprämie

$$P = P_x = \frac{M_x}{N_x}.$$

Der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt bis zum Zeitpunkte der Reserveberechnung bildet eine kurze Todesfallversicherung und ist

$$B = {}_{|s}A_x = \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x},$$

während die künftige Leistung der Versicherungsanstalt, bezogen auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung, den Wert

$$C = A_{x+s} = \frac{M_{x+s}}{D_{x+s}}$$

hat.

Die Renten ${}_{|s}a$ und a_s haben die Werte

$$_s a = {}_{|s}a_x = \frac{N_x - N_{x+s}}{D_x} \quad \text{und} \quad a_s = a_{x+s} = \frac{N_{x+s}}{D_{x+s}}.$$

Nach der *retrospektiven* Methode ist die Prämienreserve

$$_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \left(\frac{M_x}{N_x} \frac{N_x - N_{x+s}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x} \right)$$

oder

$$_sV_x = \frac{1}{D_{x+s}} \cdot \frac{N_x M_{x+s} - N_{x+s} M_x}{N_x}.$$

Nach der *prospektiven* Methode erhält man, wenn man C und P durch Rentenwerte ausdrückt, nämlich

$$C = A_{x+s} = 1 - d\, a_{x+s} \quad \text{und} \quad P = \frac{1}{a_x} - d,$$

die Reserve

$$_sV_x = 1 - d\, a_{x+s} - \left(\frac{1}{a_x} - d \right) a_{x+s}$$

oder

$$_sV_x = 1 - \frac{a_{x+s}}{a_x}.$$

Um die nach der retrospektiven Methode berechnete Prämienreserve $_sV_x$ mit der nach der prospektiven Methode gefundenen Reserve $_sV_x$ in Übereinstimmung zu bringen, drückt man in der Gleichung

$$_sV_x = \frac{1}{D_{x+s}} \frac{N_x M_{x+s} - N_{x+s} M_x}{N_x}$$

oder

$$_sV_x = \frac{M_{x+s}}{D_{x+s}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+s}}{D_{x+s}}$$

die Glieder $\frac{M_{x+s}}{D_{x+s}} = A_{x+s}$ und $\frac{M_x}{N_x} = P_x$ durch Rentenwerte aus und erhält

$$_sV_x = 1 - d\, a_{x+s} - \left(\frac{1}{a_x} - d \right) a_{x+s}$$

oder

$$_sV_x = 1 - \frac{a_{x+s}}{a_x}.$$

Man erhält beispielsweise für $x = 35$ und für $s = 5$, 10, 15, beziehungsweise 20 nach Tafel XIII

$$_5V_{35} = 1 - \frac{16{\cdot}605}{18{\cdot}047} = 0{\cdot}079903,$$

$$_{10}V_{35} = 1 - \frac{15{\cdot}062}{18{\cdot}047} = 0{\cdot}165402,$$

$$_{15}V_{35} = 1 - \frac{13{\cdot}445}{18{\cdot}047} = 0{\cdot}255001,$$

$$_{20}V_{35} = 1 - \frac{11{\cdot}792}{18{\cdot}047} = 0{\cdot}346595.$$

Die Prämienreserve ist, wenn die Versicherungssumme z. B. *K* 10.000·— beträgt, nach 5, 10, 15, beziehungsweise 20 Jahren gleich *K* 799·03, *K* 1.654·02, *K* 2.550·01, beziehungsweise gleich *K* 3.465·95.

4. *Aufgeschobene Todesfallversicherung.*

Die Jahresprämie einer um *m* Jahre aufgeschobenen Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung ist

$$P = {}_{m|}P_x = \frac{M_{x+m}}{N_x}.$$

Findet die Berechnung der Prämienreserve innerhalb der Karenzzeit statt, ist also $s < m$, so ist der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt

$$B = 0.$$

Der Wert der künftigen Leistung der Anstalt, bezogen auf den Tag der Reserveberechnung, ist

$$C = {}_{m-s|}A_{x+s} = \frac{M_{x+m}}{D_{x+s}},$$

während die Renten ${}_{|s}a$ und a_s die Werte

$$ {}_{|s}a = {}_{|s}a_x = \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x} \quad \text{und} \quad a_s = a_{x+s} = \frac{\mathbb{N}_{x+s}}{D_{x+s}} $$

haben.

Die Prämienreserve ist mithin nach *beiden* Methoden

$$ {}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \cdot \frac{M_{x+m}}{\mathbb{N}_x} \cdot \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x} $$

oder

$$ {}_sV_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{\mathbb{N}_x} : \frac{D_{x+s}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}} $$

oder auch

$$ {}_sV_x = \frac{{}_{m|}P_x}{P_{x\overline{s}|}^{\frac{1}{}}}. $$

Ist jedoch $s > m$, so ist der Barwert der Leistung der Versicherungsanstalt

$$ B = {}_{m|s-m}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+s}}{D_x}, $$

während die Jahresprämie P unverändert bleibt.

Die künftige Leistung der Versicherungsanstalt hat, wenn man sie auf den Zeitpunkt der Reserveberechnung bezieht, den Wert

$$ C = A_{x+s} = \frac{M_{x+s}}{D_{x+s}}. $$

Die Renten ${}_{|s}a$ und a_s haben die Werte

$$ {}_{|s}a = {}_{|s}a_x = \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x} \quad \text{und} \quad a_s = a_{x+s} = \frac{\mathbb{N}_{x+s}}{D_{x+s}}. $$

Man erhält mithin nach *beiden* Methoden die Prämienreserve

$$ {}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}} \left(\frac{M_{x+m}}{\mathbb{N}_x} \cdot \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x} - \frac{M_{x+m} - M_{x+s}}{D_x} \right) $$

oder

$$ {}_sV_x = \frac{1}{D_{x+s}} \frac{M_{x+s}\mathbb{N}_x - M_{x+m}\mathbb{N}_{x+s}}{\mathbb{N}_x} $$

oder auch

$$ {}_sV_x = \frac{M_{x+s}}{D_{x+s}} - \frac{M_{x+m}}{\mathbb{N}_x} \frac{\mathbb{N}_{x+s}}{D_{x+s}} = A_{x+s} - {}_mP_x \, a_{x+s}. $$

Wenn beispielsweise $x = 35$, $m = 5$ und $s = 3$, beziehungsweise 6 Jahre beträgt, so erhält man nach Tafel XIII

$$ {}_{5|}P_{35} = \frac{9906\cdot82}{503732} = 0\cdot019667, $$

$$ P_{35,\overline{3}|}^{\frac{1}{}} = \frac{24621}{503732 - 423355} = 0\cdot306319, $$

$$ {}_3V_{35} = \frac{0\cdot019667}{0\cdot306319} = 0\cdot06420 $$

und

$$ {}_6V_{35} = 0\cdot43849 - 0\cdot019667 \times 16\cdot605 = 0\cdot11192. $$

Beträgt die Versicherungssumme K 10.000·—, so ist die Prämienreserve nach 3 Jahren K 642·— und nach 6 Jahren K 1.119·20, während die Jahresprämie den Betrag von K 196·67 hat.

5. *Gemischte Versicherung.*

Bei dieser Versicherungskombination erhält man für die Prämienreserve, wenn man dieselbe nach der *prospektiven* Methode berechnet, einen der lebenslänglichen Todesfallversicherung ähnlichen Ausdruck.

Die Jahresprämie ist

$$ P = P_{x\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{|n}a_x} - d. $$

Die künftige Leistung der Versicherungsanstalt hat für $s < n$, bezogen auf den Tag der Reserveberechnung, als eine durch $(n-s)$ Jahre dauernde gemischte Versicherung für eine $(x+s)$jährige Person, den Wert

$$ C = A_{x+s,\overline{n-s}|} = 1 - d \, {}_{|n-s}a_{x+s}, $$

während die Rente

$$ a_s = {}_{|n-s}a_{x+s} $$

ist.

Die Prämienreserve ist mithin

$$ {}_sV_x = 1 - d \, {}_{|n-s}a_{x+s} - \left(\frac{1}{{}_{|n}a_x} - d \right) {}_{|n-s}a_{x+s} $$

oder

$$ {}_sV_x = 1 - \frac{{}_{|n-s}a_{x+s}}{{}_{|n}a_x}. $$

So ist z. B. für $x = 35$, $n = 25$ und $s = 10$ nach Tafel XIII

$$ {}_{10}V_{35} = 1 - \frac{271578 - 78662\cdot7}{18031} : \frac{503732 - 78662\cdot7}{27913} = 0\cdot297425. $$

Beträgt die Versicherungssumme K 10.000·—, so ist die Reserve nach 10 Jahren gleich K 2.974·25.

6. *Versicherung à terme fixe.*

Hier ist die Jahresprämie

$$ P = P_{\overline{n}|} = \frac{v^n D_x}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}}. $$

Wenn man die Prämienreserve nach der *prospektiven* Methode berechnet, so ist die künftige Leistung der Versicherungsanstalt

$$C = v^{n-s},$$

während die Rente a_s den Wert

$$a_s = {}_{|n-s}a_{x+s} = \frac{\mathbb{N}_{x+s} - \mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+s}}$$

hat.

Es ist mithin die Prämienreserve

$${}_sV_x = v^{n-s} - \frac{v^n D_x}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}} \cdot \frac{\mathbb{N}_{x+s} - \mathbb{N}_{x+n}}{D_{x+s}}.$$

Berechnet man die Prämienreserve nach der *retrospektiven* Methode, so hat dieselbe, da der Endwert der Leistung des Versicherten

$$P_{\overline{n|}}\, {}_{|s}a_x \frac{D_x}{D_{x+s}} = \frac{v^n D_x}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}} \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x} \frac{D_x}{D_{x+s}} = \frac{v^n D_x}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}} \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_{x+s}}$$

und der Endwert der Leistung der Versicherungsanstalt gleich

$$v^{n-s} \frac{l_x - l_{x+s}}{l_{x+s}}$$

ist, den Wert

$${}_sV_x = \frac{v^n D_x}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+n}} \frac{\mathbb{N}_n - \mathbb{N}_{x+s}}{D_{x+s}} - v^{n-s} \frac{l_x - l_{x+s}}{l_{x+s}}.$$

Nimmt man beispielsweise für $x = 35$, $n = 20$ und $s = 15$, so erhält man nach Tafel XIII vorerst die Jahresprämie

$$P_{\overline{20|}} = \frac{0{\cdot}50256588 \times 27913}{503732 - 126052} = 0{\cdot}0371429$$

und dann die Prämienreserve nach der prospektiven Art

$${}_{15}V_{35} = 0{\cdot}84197317 - 0{\cdot}0371429 \frac{198521 - 126052}{14096} = 0{\cdot}6510178,$$

zu welchem Werte man auch gelangt, wenn man die Prämienreserve nach der retrospektiven Methode berechnet.

Wenn die Versicherungssumme *K* 10.000·— beträgt, so ist bei einer jährlichen Prämienzahlung von *K* 371·43 die Prämienreserve nach 15 Jahren *K* 6.510·18.

3. Prämienreserve für Versicherungen mit Prämienrückgewähr.

§ 66. *Erlebensversicherung mit einmaliger und jährlicher Prämienzahlung.*

1. Bei den Versicherungen mit Prämienrückgewähr empfiehlt es sich die Prämienreserve nach der *retrospektiven* Methode zu berechnen.

Für die Erlebensversicherung mit Rückgewähr der Prämie ist die einmalige Nettoprämie

$$A = E = \frac{D_{x+m}}{D_x - \alpha(M_x - M_{x+m})},$$

während die Bruttoprämie, die den Erben des Versicherten im Falle seines vorzeitigen Todes rückerstattet wird, den Wert

$$E' = \frac{\alpha D_{x+m}}{D_x - \alpha(M_x - M_{x+m})}$$

hat.

Der Barwert der Leistung der Versicherungsanstalt ist in diesem Falle

$$B = E'\, {}_{|s}A_x = \frac{\alpha D_{x+m}}{D_x - \alpha(M_x - M_{x+m})} \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x}$$

Mithin ist die Prämienreserve

$${}_sV = \frac{D_x}{D_{x+s}} \left\{ \frac{D_{x+m}}{D_x - \alpha(M_x - M_{x+m})} - \frac{\alpha D_{x+m}}{D_x - \alpha(M_x - M_{x+m})} \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x} \right\}$$

oder

$${}_sV = \frac{D_{x+m}}{D_x - \alpha(M_x - M_{x+m})} : \frac{D_{x+s}}{D_x - \alpha(M_x - M_{x+s})}.$$

Wie man sieht, ist in diesem Falle *die Prämienreserve gleich dem Quotienten zweier Einmalprämien für dieselbe Versicherung mit der Versicherungsdauer von m, beziehungsweise von s Jahren.*

2. Werden für diese Versicherungsart Jahresprämien gezahlt, so ist die jährliche Nettoprämie

$$\pi = \frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m} - \alpha'(R_x - R_{x+m} - m M_{x+m})},$$

während die Bruttoprämie den Wert

$$\pi' = \alpha' \pi$$

hat.

Der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt ist, da die Prämienrückgewähr eine steigende abgekürzte Todesfallversicherung mit dem Anfangsbetrage π' und einer gleich großen Steigerung ist,

$$B = \pi' (IA)_{\overline{xs|}} = \alpha' \pi \frac{R_x - R_{x+s} - s \,.\, M_{x+s}}{D_x}.$$

Die Rente ${}_{|s}a$ hat den Wert

$${}_{|s}a = {}_{|s}a_x = \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x}.$$

Man erhält mithin die Prämienreserve

$${}_sV = \frac{D_x}{D_{x+s}}\left\{\pi\frac{\mathbb{N}_x-\mathbb{N}_{x+s}}{D_x} - \alpha'\pi\frac{R_x-R_{x+s}-s\,M_{x+s}}{D_x}\right\}$$

oder

$${}_sV = \frac{D_{x+m}}{\mathbb{N}_x-\mathbb{N}_{x+m}-\alpha'(R_x-R_{x+m}-m.M_{x+m})} : \frac{D_{x+s}}{\mathbb{N}_x-\mathbb{N}_{x+s}-\alpha'(R_x-R_{x+s}-s.M_{x+s})}.$$

Auch hier erscheint *die Prämienreserve als der Quotient zweier Jahresprämien für dieselbe Versicherung mit der Versicherungsdauer von m, beziehungsweise von s Jahren.*

In dem auf S. 160 angeführten Beispiele ist $x = 26$, $m = 34$ Jahre und die versicherte Summe K 10.000·—. Wenn man für dieses Beispiel die Prämienreserve bei einmaliger und jährlicher Zahlung nach $s = 19$ Jahren ermitteln will, so bestimmt man zunächst die Nettoprämien E und π für die Versicherungsdauer von 34, beziehungsweise von 19 Jahren.

Man erhält für die Versicherungsdauer von 34 Jahren

$$E = \frac{7879{\cdot}2}{38403 - 1{\cdot}1\,(11605{\cdot}10 - 4955{\cdot}84)} = 0{\cdot}253442$$

und von 19 Jahren

$$E = \frac{17281}{38403 - 1{\cdot}1\,(11605{\cdot}10 - 8003{\cdot}01)} = 0{\cdot}501761.$$

Mithin ist die *Prämienreserve* bei Zahlung der *Einmalprämie*

$${}_{19}V = \frac{0{\cdot}253442}{0{\cdot}501761} = 0{\cdot}505105.$$

Ebenso ist für die Versicherungsdauer von 34 Jahren

$$\pi = \frac{7879{\cdot}2}{792465-86448{\cdot}4-1{\cdot}16(349040{\cdot}64-61551{\cdot}59-34\times4955{\cdot}84)} = 0{\cdot}013745$$

und von 19 Jahren

$$\pi = \frac{17281}{792455-274368-1{\cdot}16\,(349040{\cdot}64-160782{\cdot}52-19\times8003{\cdot}31)} = 0{\cdot}036297.$$

Daraus folgt die *Prämienreserve* bei Zahlung von *Jahresprämien*

$${}_{19}V = \frac{0{\cdot}013745}{0{\cdot}036297} = 0{\cdot}378681.$$

Für die Versicherungssumme von K 10.000·— beträgt mithin die Prämienreserve bei Zahlung der Einmalprämie K 5.051·05 und bei Zahlung von Jahresprämien K 3.786·81.

§ 67. *Aufgeschobene Leibrente mit einmaliger und jährlicher Prämienzahlung.*

1. Hier beträgt die einmalige Nettoprämie

$${}_{m|}a = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x - \alpha\,(M_x - M_{x+m})}.$$

Die Bruttoprämie, die den Erben der versicherten Person im Falle ihres frühzeitigen Todes rückerstattet wird, hat den Wert

$${}_{m|}a' = \frac{\alpha\,\mathbb{N}_{x+m}}{D_x - \alpha\,(M_x - M_{x+m})}.$$

Der Barwert der Leistung der Versicherungsanstalt ist

$$B = {}_{m|}a' \cdot {}_{|s}A_x = \frac{\alpha\,\mathbb{N}_{x+m}}{D_x - \alpha\,(M_x - M_{x+m})} \cdot \frac{M_x - M_{x+s}}{D_x}.$$

Die Prämienreserve nach der *retrospektiven* Methode ist daher

$${}_sV_x = \frac{D_x}{D_{x+s}}\left\{\frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x - \alpha\,(M_x - M_{x+m})} - \frac{\alpha\,\mathbb{N}_{x+m}}{D_x - \alpha\,(M_x - M_{x+m})}\,\frac{M_x - M_{x+s}}{D_x}\right\}$$

oder

$${}_sV_x = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{D_x - \alpha\,(M_x - M_{x+m})} : \frac{D_{x+s}}{D_x - \alpha\,(M_x - M_{x+s})}.$$

Die Prämienreserve ist gleich dem Quotienten aus der Einmalnettoprämie dieser Versicherung und der einmaligen Nettoprämie für eine Erlebensversicherung mit einer sjährigen Versicherungsdauer.

2. Werden Jahresprämien gezahlt, so ist die jährliche Nettoprämie

$${}_{m|}\pi = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+m} - \alpha'\,(R_x - R_{x+m} - m\,M_{x+m})},$$

während die Bruttoprämie den Wert

$${}_{m|}\pi' = \alpha'\,{}_{m|}\pi$$

hat.

Der gegenwärtige Wert der Leistung der Versicherungsanstalt ist, da die Prämiengewähr eine kurze steigende Todesfallversicherung mit dem Anfangsbetrage ${}_{m|}\pi'$ und einer gleich großen Steigerung bildet,

$$B = {}_{m|}\pi'\,(I\,A)_{x:\overline{s|}} = \alpha'\,{}_{m|}\pi\,\frac{R_x - R_{x+s} - s\,M_{x+s}}{D_x}.$$

Die Rente ${}_{|s}a$ hat den Wert

$${}_{|s}a = {}_s a_x = \frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x}.$$

Mithin ist die Prämienreserve nach der *retrospektiven* Methode

$${}_sV = \frac{D_x}{D_{x+s}}\left\{{}_{m|}\pi\,\frac{\mathbb{N}_x - \mathbb{N}_{x+s}}{D_x} - \alpha'\,{}_{m|}\pi\,\frac{R_x - R_{x+s} - s\,M_{x+s}}{D_x}\right\}$$

oder

$${}_sV = \frac{\mathbb{N}_{x+m}}{\mathbb{N}_x-\mathbb{N}_{x+m}-\alpha'(R_x-R_{x+m}-m M_{x+m})} : \frac{D_{x+s}}{\mathbb{N}_x-\mathbb{N}_{x+s}-\alpha'\,(R_x-R_{x+s}-s M_{x+s})}.$$

Die Prämienreserve erscheint hier ebenfalls als der Quotient aus der

jährlichen Nettoprämie dieser Versicherung und der Jahresnettoprämie für eine Erlebensversicherung mit einer sjährigen Versicherungsdauer.

Bezugnehmend auf das auf S. 162 angeführte Beispiel, in welchem $x = 20$ und $m = 35$ Jahre gegeben sind, ist die Prämienreserve bei Zahlung der Einmalprämie nach $s = 20$ Jahren und nach Tafel XII*a*

$$_{20}V = \frac{133670}{48474 - 1{\cdot}1\,(12726{\cdot}38 - 6020{\cdot}64)} :$$

$$: \frac{21587}{48474 - 1{\cdot}1\,(12726{\cdot}38 - 8959{\cdot}7)} = 6{\cdot}67925.$$

Bei Zahlung von Jahresprämien erhält man für die Prämienreserve nach derselben Tafel den Wert

$$_{20}V = \frac{133670}{1057111 - 133670 - 1{\cdot}16\,(422583{\cdot}16 - 89548{\cdot}76 - 35 \times 6020{\cdot}64)} :$$

$$: \frac{21587}{1057111 - 373398 - 1{\cdot}16\,(422583{\cdot}16 - 203670{\cdot}55 - 20 \times 8959{\cdot}7)} = 5{\cdot}05187.$$

Für die versicherte Rente von K 3.000·— beträgt die Prämienreserve nach 20 Jahren bei Zahlung der Einmalprämie K 20.037·75 und bei Zahlung von Jahresprämien K 15.155·61.

4. Prämienreserve, ausgedrückt durch die Differenz der Jahres-Nettoprämien.

§ 68. *Berechnung der Prämienreserve durch die Jahres-Nettoprämien.*

Bezeichnet man die Jahresprämie, die eine $x$jährige Person für irgend eine Versicherung zahlt, mit P, die Jahresprämie, die von demselben Versicherten bei einem um s Jahre späteren Beitritt in dieselbe Versicherung gezahlt werden müßte, mit P_s, die lebenslänglich oder temporär zahlbare Pränumerando-Leibrente für eine $x$jährige Person mit a und jene für die um s Jahre ältere Person mit a_s, dann ist unter Berücksichtigung, daß

$$C = P_s\, a_s$$

ist, die Prämienreserve nach der *prospektiven* Methode

$$_sV_x = P_s\, a_s - P\, a_s$$

oder

$$_sV_x = (P_s - P)\, a_s.$$

Zu dieser Gleichung könnte man auch durch folgende Schlußfolgerungen gelangen. Angenommen, eine $x$jährige Person schließt eine lebenslängliche Todesfallversicherung gegen Zahlung der Jahresprämie

$P_x = P$ ab. Würde sie dieselbe Versicherung s Jahre später, also im $(x+s)$ten Lebensjahre abschließen, so müßte sie dafür eine höhere Jahresprämie $P_{x+s} = P_s$ lebenslänglich zahlen. Dadurch, daß die versicherte Person die Versicherung nicht im $(x+s)$ten, sondern im $x$ten Lebensjahre abgeschlossen hat, erspart sie alljährlich, vom $(x+s)$ten Lebensjahre angefangen bis zu ihrem Tode einen Prämienüberschuß von $P_s - P$, welcher im $(x+s)$ten Lebensjahre den Wert von

$$(P_s - P)\, a_{x+s}$$

hat, für welchen man auch

$$(P_s - P)\, a_s$$

setzen kann, wenn man die lebenslängliche Leibrente a_{x+s} mit a_s bezeichnet. Der Gesamtwert dieser Ersparnis muß, bezogen auf das $(x+s)$te Lebensjahr, mit dem Überschusse der vom $x$ten bis zum $(x+s)$ten Lebensjahre geleisteten Zahlungen der versicherten Person über die Leistungen der Versicherungsanstalt d. i. mit der Prämienreserve $_sV_x$ übereinstimmen, so daß man

$$_sV_x = (P_s - P)\, a_s$$

setzen kann.

Die Richtigkeit dieser Gleichung läßt sich auch bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung, wenn man darin für P_s, P und a_s die entsprechenden Werte einsetzt, direkt nachweisen.

Denn es ist

$$P_s = P_{x+s} = \frac{1}{a_{x+s}} - d,$$

$$P = P_x = \frac{1}{a_x} - d$$

und mithin, da $a_s = a_{x+s}$ ist,

$$_sV_x = \left(\frac{1}{a_{x+s}} - d - \frac{1}{a_x} + d\right) a_{x+s}$$

oder

$$_sV_x = 1 - \frac{a_{x+s}}{a_x},$$

eine Gleichung, die mit der auf S. 180 ausgeführten vollkommen übereinstimmt.

Diese Gleichung kann für die Berechnung der Prämienreserve von einfachen Versicherungsarten ohne weiteres, von Versicherungen mit Prämienrückgewähr oder mit veränderlicher Prämie nur mit besonderer Vorsicht angewendet werden.

Ist $P_s < P$, was bei gewissen Versicherungsarten mitunter auch eintreten kann, so erhält man eine *negative Prämienreserve*. In diesem Falle könnte der Versicherte seine Versicherung aufgeben, wodurch natürlich die Versicherungsanstalt einen Verlust erleiden würde. Eine negative Prämienreserve ergäbe sich z. B. bei einer Todesfallversicherung neugeborner Kinder mit lebenslänglicher, jährlicher, konstanter Prämienzahlung P_0. In diesem Falle ist nach den meisten Sterbetafeln wegen der großen Sterbensgefahr unter den Neugebornen $P_1 < P_0$, $P_2 < P_0$; mithin ist auch

$$V_1 < 0, \qquad V_2 < 0.$$

In der Praxis werden negative Reserven durch Null ersetzt.

5. Prämienreserve nach einer nicht ganzen Anzahl von Jahren.

§ 69. *Berechnung der Prämienreserve nach einer nicht ganzen Anzahl von Jahren.*

Die Reserveberechnung findet in der Regel am Ende eines jeden Geschäftsjahres, das auch meistens mit dem Ende eines jeden Kalenderjahres zusammenfällt, statt. Die meisten Versicherungen werden aber nicht am Anfange oder am Ende, sondern im Laufe des Jahres abgeschlossen mit der Bedingung, daß die Jahresprämien immer am Datum des Versicherungsabschlusses gezahlt werden.

Die bis jetzt behandelten Reserveformeln geben aber eine Reserve, wie sie für eine ganze Anzahl von Jahren nach dem Abschlusse der Versicherung sein soll. Es ist daher notwendig, die Prämienreserve nach einer gemischten Anzahl von Jahren zu berechnen.

Man bezeichnet die Prämienreserve für die Versicherungsdauer von $s + \frac{n}{t}$ Jahren, wo s eine ganze Zahl und $\frac{n}{t}$ einen echten Bruch vorstellt, mit

$$_{s+\frac{n}{t}}V_x.$$

Am Ende des $s$ten Versicherungsjahres ist die Reserve $_sV_x$; sie wächst um die am Anfange des $(s+1)$ten Versicherungsjahres bezahlte Jahresprämie P_x zu $_sV_x + P_x$ an, welcher Ausdruck den Wert der Reserve für den Beginn des $(s+1)$ten Jahres gibt.

Am Schlusse des $(s+1)$ten Versicherungsjahres ist die Reserve $_{s+1}V_x$; die Differenz $_{s+1}V_x - (_sV_x + P_x)$ stellt mithin die Zunahme der Reserve im Laufe des $(s+1)$ten Versicherungsjahres vor, d. i. vom Zeitpunkte unmittelbar nach der Prämienzahlung bis zum Schlusse des Versiche-

rungsjahres. Nimmt man an, daß diese Zunahme (oder auch Abnahme, wie z. B. bei der kurzen Todesfallversicherung gegen Schluß der Versicherungsdauer) im Laufe des Jahres der Zeit proportional ist, so nimmt die Prämienreserve in $\frac{n}{t}$ Teilen des Jahres zu (ab) um

$$\frac{n}{t}(_{s+1}V_x - {_sV_x} - P_x).$$

Fügt man hinzu $_sV_x + P_x$, so erhält man die Reserve für $s + \frac{n}{t}$ Jahre nach dem Abschluß der Versicherung.

Es ist mithin

$$_{s+\frac{n}{t}}V_x = {_sV_x} + P_x + \frac{n}{t}(_{s+1}V_x - {_sV_x} - P_x)$$

oder

$$_{s+\frac{n}{t}}V_x = \left\{{_sV_x} + \frac{n}{t}(_{s+1}V_x - {_sV_x})\right\} + \frac{t-n}{t}P_x.$$

Die so berechnete Reserve, welche „*die mathematische Prämienreserve*" genannt wird, ist als die Summe zweier Summanden dargestellt, deren erster Summand

$$_sV_x + \frac{n}{t}(_{s+1}V_x - {_sV_x})$$

in der Praxis allein als „*Prämienreserve*" oder „*Bilanzreserve*" bezeichnet wird, während der zweite Summand

$$\frac{t-n}{t}P_x,$$

als im Sinne einer *unverdienten* oder *vorausbezahlten* erst dem nächsten Rechnungsjahre zufallenden *Prämie*, der *Prämienübertrag* heißt.

Bei der Bemessung des Jahresbruchteiles geht man nie über ein Zwölftel des Jahres, d. i. über einen Monat hinaus; von den Tagen werden daher weniger als 15 Tage vernachlässigt, während 15 oder mehr als 15 Tage für einen vollen Monat gerechnet werden.

Bei stark besetzten Altersgruppen kann man einen jeden Versicherten, der zwischen s und $(s+1)$ Jahren versichert ist, als durchschnittlich $\left(s+\frac{1}{2}\right)$ Jahre versichert betrachten und man hat dann

$$_{s+\frac{1}{2}}V_x = \frac{_sV_x + {_{s+1}V_x}}{2} + \frac{P_x}{2}.$$

Bei Versicherungen, die im Laufe des Rechnungsjahres abgeschlossen werden, wird am Ende dieses Jahres die Reserve mit $\frac{_1V_x}{2}$ eingestellt.

Beispiel.

Eine 35jährige Person ging am 1. April 1913 eine einfache Todesfallversicherung gegen eine lebenslängliche Zahlung von Jahresprämien auf den Betrag von K 10.000·— ein. Wie groß ist die am 1. April eines jeden Jahres zu zahlende Jahresprämie bei 15prozentigem Regiezuschlage und wie groß ist die Prämienreserve am 31. Dezember 1915, 1916, 1917, beziehungsweise 1918?

Die jährliche Nettoprämie findet man nach der Gleichung

$$P_x = \frac{M_x}{N_x}$$

und nach Tafel XIII

$$P_{35} = \frac{9913 \cdot 09}{496310} = 0 \cdot 019974.$$

Die jährliche Nettoprämie beträgt K 199·74, während die Bruttoprämie den Wert von K 229·70 hat.

Um die Prämienreserve zu berechnen, geht man von der Gleichung aus

$$_{s+\frac{n}{t}}V_x = \left\{ {_sV_x} + \frac{n}{t} ({_{s+1}V_x} - {_sV_x}) \right\} + \frac{t-n}{t} P_x,$$

setzt darin für $s + \frac{n}{t}$ die Werte $2 + \frac{3}{4}$, $3 + \frac{3}{4}$, $4 + \frac{3}{4}$, beziehungsweise $5 + \frac{3}{4}$ ein und erhält für die kaufmännische Prämienreserve:

$$_{2+\frac{3}{4}}V_{35} = {_2V_{35}} + \frac{3}{4} ({_3V_{35}} - {_2V_{35}}) = \frac{1}{4} \cdot {_2V_{35}} + \frac{3}{4} \cdot {_3V_{35}} = 0 \cdot 037465,$$

$$_{3+\frac{3}{4}}V_{35} = \frac{1}{4} {_3V_{35}} + \frac{3}{4} {_4V_{35}} = 0 \cdot 051585,$$

$$_{4+\frac{3}{4}}V_{35} = \frac{1}{4} {_4V_{35}} + \frac{3}{4} {_5V_{35}} = 0 \cdot 065946$$

und

$$_{5+\frac{3}{4}}V_{35} = \frac{1}{4} {_5V_{35}} + \frac{3}{4} {_6V_{35}} = 0 \cdot 080604,$$

während der Prämienbetrag den Wert

$$\frac{1}{4} P_{35} = 0 \cdot 004994$$

hat.

Für die Berechnung der Prämienreserven $_2V_{35}$, $_3V_{35}$, ... $_6V_{35}$ diente die Gleichung

$$_sV_x = 1 - \frac{a_{x+s}}{a_x}.$$

Wenn die Versicherungssumme K 10.000·— beträgt, so hat die kaufmännische Prämienreserve:

am 31. Dezember 1915 den Wert von K 374·65,
„ 31. „ 1916 „ „ „ K 515·85,
„ 31. „ 1917 „ „ „ K 659·46
und „ 31. „ 1918 „ „ „ K 806·04,

während der Prämienübertrag in allen vier Fällen den Wert von K 49·94 hat.

V. ABSCHNITT.

Rückkauf, Reduktion der Versicherungssumme und Abänderung einer Versicherung.

§ 70. *Rückkaufswert der Polizze.*

Wenn jemand aus irgendwelchen Gründen seine Prämienzahlung einstellt und dadurch auf die volle Versicherungsleistung verzichtet, die er mit der Versicherungsanstalt beim Abschlusse des Versicherungsvertrages (Polizze) ausbedungen hat, so heißt die bare Abfindungssumme, die ihm die Anstalt dafür zahlt, der *Rückkaufswert* der Polizze.

Besteht jedoch eine derartige Versicherung, daß die Anstalt möglicherweise keine Zahlungen zu leisten hätte, wie bei frühzeitigem Tode einer Erlebensversicherung und einer Leibrente ohne Prämienrückgewähr, so wird dem Versicherten keine Abfindung gezahlt. Eine Abfindung wird nur dann gewährt, wenn die Versicherungssumme unter jeder Bedingung zur Auszahlung gelangen muß. Die Höhe der Rückkaufssumme wird, vorausgesetzt, daß die Polizze mindestens drei Jahre in Kraft ist, mit einem Bruchteile ($^3/_4$) der Prämienreserve bemessen; wenn die Rückkaufssumme aber nach einer mit der Versicherungsdauer bis zur Höhe der vollen Prämienreserve steigenden Skala berechnet wird, so hat diese mit einer Quote von mindestens 60 Prozent der Prämienreserve zu beginnen *(Assekuranzregulativ vom 5. März 1896)*.

Statt den Rückkaufswert in barem Gelde zu empfangen, kann der Versicherte auch seine Polizze in eine äquivalente *prämienfreie Polizze* auf eine abgekürzte Versicherungssumme oder Versicherungsdauer umwandeln lassen.

Im Falle einer prämienfreien Polizze (*Reduktion* der Versicherung) ist die reduzierte Versicherungssumme entweder unter Zugrundelegung der *vollen* auf die Versicherung entfallenden Prämienreserve, oder wie

bei den gemischten Versicherungen im Verhältnis der abgelaufenen Versicherungsjahre zu der ganzen Versicherungsdauer zu berechnen.

Stellt P die Prämie vor, die der Versicherte jährlich für seine Versicherung zahlt, P_s jene Prämie, die er jährlich zahlen müßte, wenn er s Jahre später im Zeitpunkte der Bestimmung der beitragsfreien Polizze beitreten würde und ${}_sW$ den Wert dieser Polizze, so besteht, wenn die volle Prämienreserve ${}_sV$ als einmalige Nettoprämie der freien Polizze aufgefaßt wird, zwischen diesen Größen die Gleichung

$${}_sW = \frac{{}_sV}{P_s \, . \, a_s}$$

oder, da ${}_sV = (P_s - P)\, a_s$ ist,

$${}_sW = \frac{(P_s - P)\, a_s}{P_s\, a_s}$$

oder endlich

$${}_sW = 1 - \frac{P}{P_s} \cdot$$

Diese Gleichung gilt für alle Versicherungsarten, mit Ausnahme der Versicherungen mit Prämienrückgewähr oder mit veränderlicher Prämie.

So z. B. ist für die *lebenslängliche Todesfallversicherung* in dem Augenblicke, wo der Wert der prämienfreien Polizze bestimmt wird, die Prämienreserve nach der prospektiven Methode

$${}_sV_x = A_{x+s} - P_x\, a_{x+s}$$

und die Einmalprämie für den Einheitsbetrag dieser Polizze

$$A_{x+s} = P_{x+s}\, a_{x+s}.$$

Wird die *volle* Prämienreserve der Rechnung zugrunde gelegt, so muß die Einmalprämie des Polizzenwertes ${}_sW_x$, d. i. ${}_sW_x \, . \, A_{x+s}$ gleich der Prämienreserve ${}_sV_x$ sein.

Es ist also

$${}_sW_x\, A_{x+s} = A_{x+s} - P_x\, a_{x+s}.$$

Daraus erhält man zunächst

$${}_sW_x = 1 - P_x \cdot \frac{a_{x+s}}{A_{x+s}}$$

und dann, da $\frac{A_{x+s}}{a_{x+s}} = P_{x+s}$ ist,

$${}_sW_x = 1 - \frac{P_x}{P_{x+s}} \cdot$$

Beispiel.

Eine 35jährige Person schließt eine lebenslängliche Todesfallversicherung auf das Kapital von *K* 10.000·— mit einer lebenslänglichen

Prämienzahlung ab. Welchen Wert hat die beitragsfreie Polizze, wenn die versicherte Person nach 20 Jahren ihre Prämienzahlungen einstellt.

Wendet man die Gleichung

$$_sW_x = 1 - \frac{P_x}{P_{x+s}}$$

an, so erhält man, wenn man vorerst die Werte für P_{35} und P_{55} nach Tafel XIII bestimmt,

$$_{20}W_{35} = 1 - \frac{0\cdot0215944}{0\cdot0509834} = 0\cdot576443$$

und mithin für die anfängliche Versicherungssumme von *K* 10.000·— den Betrag von *K* 5.764·43, d. i. ungefähr 58 Prozent des ursprünglichen Kapitals.

§ 71. *Reduktion der Versicherungssumme. Umwandlung von Versicherungen.*

In ähnlicher Weise, wie bei der prämienfreien Polizze die vorhandene Prämienreserve der Berechnung der reduzierten Versicherungssumme zugrunde gelegt wird, muß auch in dem Falle, wo es sich um eine Abänderung der Versicherung handelt, wie z. B. *beim Übergange zu einer anderen Versicherungssumme* oder *zu einer anderen Versicherungsart* oder *zu einer Änderung der Prämienzahlung*, die bereits angesammelte Prämienreserve — mitunter auch mit einem etwas verringerten Betrage — bei der Berechnung der neuen Prämie in Anwendung gebracht werden.

Dabei muß *die Summe der* zur Zeit der Abänderung einer Versicherung *vorhandenen Prämienreserve und dem Werte der zukünftigen Prämienzahlungen dem* auf diese Zeit bezogenen *Werte der Einmalprämie für die abgeänderte Versicherung gleichgesetzt werden.*

Von den vielen möglichen Veränderungen einer Versicherung wollen wir folgende Beispiele behandeln.

1. Jemand, der im Alter von x Jahren gegen Zahlung von Jahresprämien eine lebenslängliche Todesfallversicherung auf den Betrag C abgeschlossen hat, will, nachdem diese Versicherung schon s Jahre in Kraft bestand, den Versicherungsbetrag auf C′ abändern. Welche Jahresprämie wird er weiterhin zu entrichten haben?

Am Ende des $s$ten Versicherungsjahres ist für die bis dahin unverändert gebliebene Versicherung die Prämienreserve

$$C\,.\,{}_sV_x = C\,A_{x+s} - C\,P_x\,a_{x+s}$$

vorhanden, worin $C\,P_x$ die ursprüngliche Jahresprämie bedeutet. Diese Prämienreserve, vermehrt um den Wert der weiterhin zu zahlenden

Jahresprämien, die wir mit P′ bezeichnen, muß gleich sein der einmaligen Prämie einer ebensolchen Versicherung auf das veränderte Kapital C′ für das inzwischen erreichte Alter von $(x+s)$ Jahren.

Man hat mithin die Gleichung

$$C\,.\,{}_sV_x + P'\,a_{x+s} = C'\,A_{x+s}$$

oder, wenn man darin für $C\,.\,{}_sV_x$ den Wert aus der früheren Gleichung einsetzt,

$$C\,A_{x+s} - C\,P_x\,a_{x+s} + P'\,a_{x+s} = C'\,A_{x+s}.$$

Bezeichnen wir die ursprüngliche Prämie $C\,P_x$ mit P, so ist

$$C\,A_{x+s} - P\,a_{x+s} + P'\,a_{x+s} = C'\,A_{x+s}.$$

Daraus ergibt sich die *Prämienerhöhung*, wenn $C' > C$ ist,

$$P' - P = (C' - C)\,\frac{A_{x+s}}{a_{x+s}}.$$

Für $C' < C$ erhält man den *Prämiennachlaß*

$$P - P' = (C - C')\,\frac{A_{x+s}}{a_{x+s}}.$$

Wird beispielsweise bei $x = 35$ nach einem $s = 15$jährigen Bestande der lebenslänglichen Todesfallversicherung die Versicherungssumme von *K* 10.000·— auf *K* 15.000·— erhöht, so beträgt die Prämienerhöhung nach den Grundlagen der Tafel XII*a*

$$P' - P = (15000 - 10000)\,\frac{0\cdot515411}{14\cdot330} = 179\cdot836.$$

Da die frühere Prämie

$$P = C\,P_{35} = 10000\,\frac{9913\cdot09}{496310} = K\ 199\cdot74$$

beträgt, so ist die neue Prämie

$$P' = K\ 199\cdot74 + K\ 179\cdot84 = K\ 379\cdot58.$$

Wird hingegen die Versicherungssumme von *K* 10.000·— auf *K* 5.000·— reduziert, so beträgt der Nachlaß nach der Gleichung

$$P - P' = (C - C')\,\frac{A_{x+s}}{a_{x+s}}$$

und nach denselben Grundlagen *K* 179·84. Mithin hat die neue Prämie den Wert von *K* 19·90.

2. Nach einem $s$jährigen Bestande soll eine Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung derart abgeändert werden, daß der Versicherte die Versicherungssumme mit dem erreichten $z$ten Lebens-

jahre erhält. Wie groß wird die neue Jahresprämie, die wir mit P′ bezeichnen, für diese nunmehr gemischte Versicherung sein?

Aus der Gleichung

$$ {}_sV_x + P'\,{}_{|z-x-s}a_{x+s} = A_{x+s,\overline{z-x-s}|} $$

erhält man, wenn man darin für ${}_sV_x$ und $A_{x+s,\overline{z-x-s}|}$ die Werte $1 - \frac{a_{x+s}}{a_x}$ und $1 - d\,{}_{|z-x-s}a_{x+s}$ einsetzt,

$$ P' = \frac{a_{x+s}}{a_x \cdot {}_{|z-x-s}a_{x+s}} - d. $$

Für die Mehrprämie erhält man, da $P_x = \frac{1}{a_x} - d$ ist, den Wert

$$ P' - P = \frac{a_{x+s}}{a_x}\left(\frac{1}{{}_{|z-x-s}a_{x+s}} - \frac{1}{a_{x+s}}\right). $$

Man findet z. B. für $x = 35$, $s = 15$ und $z = 65$ nach der Gleichung

$$ P' = \frac{a_{x+s}}{a_x \cdot {}_{|z-x-s}a_{x+s}} - d $$

und nach Tafel XII*a*

$$ P' = \frac{195482}{18\cdot591\,(195482 - 51771\cdot7)} - 0\cdot0338164 = 0\cdot039351. $$

Für die Versicherungssumme von *K* 10.000·— beträgt die neue Prämie *K* 393·51, während die ursprüngliche Prämie wie im früheren Beispiele den Wert von *K* 199·74 hat.

3. Eine seit s Jahren bestehende Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung P soll derart verändert werden, daß die Prämienzahlung mit dem Alter von z Jahren aufhört, d. h. daß am Beginne des $z$ten Lebensjahres die letzte Prämie gezahlt wird. Um wie viel erhöht sich nun die neue Jahresprämie?

Aus der Gleichung

$$ {}_sV_x + P'\,{}_{|z-x-s}a_{x+s} = A_{x+s}, $$

worin P′ die neue Prämie bedeutet, ergibt sich, wenn man darin für ${}_sV_x$ den Wert $A_{x+s} - P\,a_{x+s}$ einsetzt,

$$ P' = \frac{a_{x+s}}{{}_{|z-x-s}a_{x+s}}\,P $$

oder durch Grundwerte ausgedrückt

$$ P' = \frac{N_{x+s}}{N_{x+s} - N_z}\,P. $$

Die Erhöhung der ursprünglichen Prämie beträgt somit

$$ P' - P = \frac{N_{x+s}}{N_{x+s} - N_z}\,P - P $$

oder

$$ P' - P = \frac{N_z}{N_{x+s} - N_z}\,P. $$

So ist z. B. für $x = 35$ nach einem $s = 30$jährigen Bestande der Versicherung die neue Prämie nach der Gleichung

$$ P' = \frac{N_{x+s}}{N_{x+s} - N_z}\,P $$

und wenn die Prämienzahlung mit dem 70. Lebensjahre aufhört, nach Tafel XIIa,

$$ P' = \frac{51771\cdot7}{51771\cdot7 - 27835\cdot2} \times 199\cdot736 = 432\cdot00. $$

Es beträgt somit die neue Prämie *K* 432·— und die Erhöhung *K* 432 — *K* 199·74, d. i. *K* 232·26.

VI. ABSCHNITT.

Prämienberechnung für verbundene Leben.

1. Einmal- und Jahres-Prämien für Erlebens- und Rentenversicherungen.

§ 72. *Erlebensversicherung.*

Sowohl die Prämien als auch die Reserven sämtlicher bisher behandelten Versicherungen hatten die gemeinsame Voraussetzung, daß Leistungen und Gegenleistungen ausnahmslos von dem Leben oder Sterben einer einzigen Person abhängig gemacht wurden. Doch können auch Versicherungsverträge abgeschlossen werden, bei denen das Leben oder die Sterblichkeit zweier oder mehrerer Personen berücksichtigt wird.

Solche Versicherungsarten werden *Versicherungen auf verbundene Leben* genannt.

Zwei durch irgendwelche Interessen miteinander verbundene Personen, es können dies zwei Ehegatten, oder Vater und Kind, oder zwei Geschwister, zwei Geschäftskompagnons usw. sein, die wir aber der bequemeren Ausdrucksweise halber als Mann und Frau annehmen, von denen der Mann x, die Frau y Jahre alt ist, erlegen bei einer Versicherungsanstalt eine einmalige Nettoprämie $A_{xy\overline{m|}}^{\;1}$, die auch mit ${}_mE_{xy}$ bezeichnet wird, um nach m Jahren, falls beide Ehegatten am Leben sind, eine Kapitalseinheit zu erhalten.

Die Wahrscheinlichkeit, daß beide Personen nach m Jahren noch leben, ist

$${}_mp_{xy} = {}_mp_x \times {}_mp_y = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+m}}{l_y}$$

und dieses ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß die Kapitalseinheit nach m Jahren ausgezahlt wird.

Der gegenwärtige Wert der wahrscheinlichen Auszahlung dieser Kapitalseinheit bildet die einmalige Nettoprämie

$${}_mE_{xy} = v^m \, {}_mp_{xy}$$

oder

$${}_mE_{xy} = \frac{v^m \, l_{x+m} \, l_{y+m}}{l_x \, l_y}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung mit v^x, so erhält man

$${}_mE_{xy} = \frac{v^{x+m} \, l_{x+m} \, l_{y+m}}{v^x \, l_x \, l_y}$$

oder

$${}_mE_{xy} = \frac{D_{x+m} \, l_{y+m}}{D_x \, l_y}.$$

Die Multiplikation des Zählers und Nenners mit v^y gibt

$${}_mE_{xy} = \frac{l_{x+m} \,.\, v^{y+m} \, l_{y+m}}{l_x \,.\, v^y \, l_y}$$

oder

$${}_mE_{xy} = \frac{l_{x+m} \, D_{y+m}}{l_x \, D_y}.$$

Das Produkt $D_x \, l_y$ oder $l_x \, D_y$, dessen ein Faktor eine diskontierte, der andere eine unmittelbare Zahl der Lebenden bildet, wird mit D_{xy} bezeichnet und *„diskontiertes Paar der Lebenden"* genannt.

Aus rein praktischen Gründen wird, um kleinere Zahlen zu erhalten, nach dem Leben des höheren Alters diskontiert.

De Morgan hat, um jede Zweideutigkeit zu umgehen, vorgeschlagen, die diskontierten Paare der Lebenden nach der Gleichung

$$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} \, l_x \, l_y$$

zu bilden.

Nimmt nämlich das Alter einer jeden Person um 1 Jahr zu, also

$$D_{x+1:y+1} = v^{\frac{x+1+y+1}{2}} \, l_{x+1} \, l_{y+1}$$

oder

$$D_{x+1:y+1} = v^{\frac{x+y}{2}+1} \, l_{x+1} \, l_{y+1},$$

so nimmt auch, wie man sieht, der Exponent von v um 1 zu, womit die Richtigkeit der Gleichung

$$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} \, l_x \, l_y$$

erwiesen ist; man hat jedoch dann, wenn $(x+y)$ eine ungerade Zahl ist, mit gebrochenen Exponenten von v zu rechnen.

Nach Einführung der Bezeichnung von D_{xy} erhält man für die Einmalprämie der Erlebensversicherung

$$_{m}E_{xy} = \frac{D_{x+m:y+m}}{D_{xy}}.$$

In der Praxis kommt eine solche Versicherung allein sehr selten vor; sie ist hier hauptsächlich aus dem Grunde angeführt, um auf ihrer Grundlage die in den folgenden Paragraphen behandelten Verbindungsrenten berechnen zu können.

Beispiel.

Zwei Brüder, von denen der eine 35, der andere 34 Jahre alt ist, wollen nach Ablauf von 25 Jahren, vorausgesetzt, daß dann beide noch leben, K 10.000·— erhalten. Wie groß wird die Einmalprämie sein, wenn 8 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden?

Unter Anwendung der Gleichung

$$_{m}E_{xy} = \frac{D_{x+m} \cdot l_{y+m}}{D_x \cdot l_y}$$

erhält man nach Tafel IX*a*

$$_{25}E_{35:34} = \frac{7915{\cdot}2 \times 64065}{27135 \times 91273} = 0{\cdot}20461.$$

Wendet man auf das Beispiel die Gleichung

$$_{m}E_{xy} = \frac{l_{x+m} D_{y+m}}{l_x D_y}$$

an, so erhält man nach derselben Tafel

$$_{25}E_{35:34} = \frac{62356 \times 8416{\cdot}7}{90514 \times 28338} = 0{\cdot}20461.$$

Für die Versicherungssumme von K 10.000·— beträgt die Einmalprämie samt 8prozentigem Regiezuschlage K 2.657·88.

§ 73. *Verbindungsrente bis zum ersten Tode.*

Unter einer *Verbindungsrente bis zum ersten Tode* versteht man eine Rente, die sofort oder erst nach Ablauf eines Jahres beginnt, je nachdem sie prä- oder postnumerando gezahlt wird und solange währt, als beide Personen, von denen die eine x, die andere y Jahre alt ist, am Leben sind. Stirbt eine der beiden Personen, gleichgiltig welche, so hört die Rente auf.

Ist der jährliche Rentenbetrag die Einheit, so bezeichnet man die *Pränumerando-Rente* bis zum *ersten* Tode mit a_{xy} und die *Postnumerando-Rente* mit a_{xy}.

In beiden Fällen kann deren Wert als eine Summe von Erlebensversicherungen aufgefaßt werden, die in den entsprechenden Zeitintervallen zur Auszahlung gelangen.

Es ist mithin

$$\mathrm{a}_{xy} = {}_0E_{xy} + {}_1E_{xy} + {}_2E_{xy} + \cdots\cdots$$

und

$$a_{xy} = {}_1E_{xy} + {}_2E_{xy} + {}_3E_{xy} + \cdots\cdots$$

oder

$$\mathrm{a}_{xy} = \frac{D_{xy} + D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + \cdots\cdots}{D_{xy}}$$

und

$$a_{xy} = \frac{D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + D_{x+3:y+3} + \cdots\cdots}{D_{xy}}.$$

Führt man für „*die Summe der diskontierten Paare der Lebenden*" die Bezeichnung $\mathbb{N}_{xy}$ ein, also

$$D_{xy} + D_{x+1:y+1} + D_{x+2:y+2} + \cdots\cdots = \Sigma D_{xy} = \mathbb{N}_{xy},$$

so kann man kurz schreiben

$$\mathrm{a}_{xy} = \frac{\mathbb{N}_{xy}}{D_{xy}}$$

und

$$a_{xy} = \frac{\mathbb{N}_{x+1:y+1}}{D_{xy}}.$$

Zwischen der Pränumerando- und Postnumerando-Verbindungsrente bis zum ersten Tode besteht die leicht zu beweisende Gleichung

$$\mathrm{a}_{xy} = 1 + a_{xy}.$$

Die *aufgeschobene, kurze* und *kurze aufgeschobene Verbindungsrente auf zwei Leben* werden geradeso wie auf *ein Leben* gebildet. Die auf ein Leben entwickelten Gleichungen haben auch hier ihre Giltigkeit, wenn man darin überall für x den Index xy setzt.

So ist die aufgeschobene

$$_{m|}\mathrm{a}_{xy} = \frac{\mathbb{N}_{x+m:y+m}}{D_{xy}}$$

oder

$$_{m|}\mathrm{a}_{xy} = {}_mE_{xy} \cdot \mathrm{a}_{x+m:y+m},$$

die kurze

$$_{|n}\mathrm{a}_{xy} = \mathrm{a}_{xy} - {}_{n|}\mathrm{a}_{xy}$$

oder

$${}_{|n}\mathfrak{a}_{xy} = \mathfrak{a}_{xy} - {}_n E_{xy}\, \mathfrak{a}_{x+n:y+n}$$

und die kurze angeschobene Pränumerando-Verbindungsrente

$${}_{m|n}\mathfrak{a}_{xy} = {}_{m|}\mathfrak{a}_{xy} - {}_{m+n|}\mathfrak{a}_{xy}$$

oder

$${}_{m|n}\mathfrak{a}_{xy} = {}_m E_{xy}\, \mathfrak{a}_{x+m:y+m} - {}_{m+n}E_{xy}\, \mathfrak{a}_{x+m+n:y+m+n}.$$

Wird die Verbindungsrente in $m$teljährlichen Raten mit dem jeweiligen Betrage von $\frac{1}{m}$ ausbezahlt, so hat eine solche Rente, analog dem auf Seite 129 Entwickelten, je nachdem sie prä- oder postnumerando gezahlt wird, den Wert

$$\mathfrak{a}^{(m)}_{xy} = \mathfrak{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} \text{ oder } a^{(m)}_{xy} = a_{xy} + \frac{m-1}{2m}.$$

Beispiele.

1. Ein Ehepaar, von welchem der Mann 59, die Frau 54 Jahre alt ist, will am Schlusse eines jeden Jahres, so lange *beide* leben, K 3.000·— erhalten. Wie groß ist die Einmalprämie bei 10prozentigem Regiezuschlage?

Unter Anwendung der Gleichung

$$a_{xy} = \mathfrak{a}_{xy} - 1$$

erhält man nach Tafel IX*c* für die Renteneinheit

$$a_{59:54} = 9{\cdot}611 - 1 = 8{\cdot}611$$

und für die Rente von K 3.000·— mit 10prozentigem Zuschlage die Einmalprämie von K 28.416·30.

2. Zwei Zwillingsschwestern im Alter von 30 Jahren möchten eine mit dem 50. Lebensjahre beginnende Verbindungsrente von K 2.000·— kaufen. Wie groß ist die Kaufsumme bei 10prozentigem Regiezuschlage?

Wendet man die Gleichung

$${}_{m|}\mathfrak{a}_{xy} = {}_m E_{xy}\, \mathfrak{a}_{x+m:y+m}$$

oder

$${}_{m|}\mathfrak{a}_{xy} = \frac{D_{x+m}\, l_{y+m}}{D_x\, l_y}\, \mathfrak{a}_{x+m:y+m}$$

an, so erhält man Tafel IX*b* und IX*c* für die Renteneinheit

$${}_{20|}\mathfrak{a}_{30:30} = \frac{D_{50}\, l_{50}}{D_{30}\, l_{30}}\, \mathfrak{a}_{50:50}$$

oder

$${}_{20|}\mathfrak{a}_{30:30} = 5{\cdot}44386.$$

Die Kaufsumme beträgt für diese aufgeschobene Verbindungsrente von K 2.000·— bei 10prozentigem Zuschlage K 11.976·49.

§ 74. *Verbindungsrente bis zum zweiten Tode.*

Darunter versteht man eine Rente, die nicht aufhört, wenn eine der beiden miteinander verbundenen Personen stirbt, sondern bis *zum Tode der längstlebenden Person* fortdauert. Man bezeichnet den Barwert derselben pro Einheit, je nachdem sie prä- oder postnumerando gezahlt wird, mit $\mathfrak{a}_{\overline{xy}}$ oder $a_{\overline{xy}}$ und kann bei der Berechnung des Rentenbarwertes diese Versicherung auf einfachere Versicherungen zurückführen.

Wenn sich die $x$jährige und ebenso die $y$jährige Person, eine jede für sich allein versichern würde, so müßten sie beide dafür an die Rentenanstalt $\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y$ zahlen. Die Rentenanstalt würde, solange beide Personen leben, jährlich zwei Kapitalseinheiten und nach dem Tode der zuerst sterbenden Person noch jährlich eine Einheit zu zahlen haben. Damit aber die Rentenanstalt, wenn auch beide Teile leben, nur eine Einheit zahlen soll, so muß sie den Barwert $\mathfrak{a}_{xy}$ einer Verbindungsrente zurückerstatten.

Die gesuchte einmalige Prämie ist daher bei einer Pränumerandozahlung der Renteneinheit

$$\mathfrak{a}_{\overline{xy}} = \mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{xy}$$

und bei einer Postnumerandozahlung

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}.$$

Auch hier besteht die Gleichung

$$\mathfrak{a}_{\overline{xy}} = 1 - a_{\overline{xy}}.$$

Für die *aufgeschobene, kurze* und *kurze aufgeschobene Verbindungsrente bis zum zweiten Tode* gelten folgende Gleichungen:

$${}_{m|}\mathfrak{a}_{\overline{xy}} = {}_{m|}\mathfrak{a}_x - {}_{m|}\mathfrak{a}_y - {}_{m|}\mathfrak{a}_{xy},$$

$${}_{|n}\mathfrak{a}_{\overline{xy}} = {}_{|n}\mathfrak{a}_x - {}_{|n}\mathfrak{a}_y - {}_{|n}\mathfrak{a}_{xy},$$

$${}_{m|n}\mathfrak{a}_{\overline{xy}} = {}_{m|n}\mathfrak{a}_x - {}_{m|n}\mathfrak{a}_y - {}_{m|n}\mathfrak{a}_{xy}.$$

Wird an die beiden miteinander verbundenen Personen bis zum *ersten* Tode die Rente von einer Einheit und von da ab an *die überlebende Person* bis zu ihrem Tode eine Rente von dem $\frac{m}{n}$ Teile der Einheit ausbezahlt, so kann man diese Versicherungskombination, um ihren gegenwärtigen Wert berechnen zu können, auch so auffassen, als wenn das versicherte Paar eine Verbindungsrente bis zum zweiten Tode in der auf den $\frac{m}{n}$ Teil der Einheit reduzierten Höhe und außerdem noch eine Versicherungsrente bis zum ersten Tode mit dem auf eine

Einheit sich ergänzenden Betrage, d. i. von $\left(1-\frac{m}{n}\right)$, beziehen würde.

Der Wert dieser Versicherungskombination ist mithin bei einer Postnumerando-Zahlung der Rente

$$\frac{m}{n} a_{\overline{xy}} + \left(1-\frac{m}{n}\right) a_{xy}$$

oder, wenn man darin für $a_{\overline{xy}}$ den Wert $a_x + a_y - a_{xy}$ einsetzt,

$$\frac{m}{n}(a_x + a_y - a_{xy}) + \left(1-\frac{m}{n}\right) a_{xy}$$

und endlich

$$\frac{m}{n}(a_x + a_y) - \frac{2m-n}{n} a_{xy}$$

Beispiel.

Ein Ehepaar, von welchem der Mann 45, die Frau 40 Jahre alt ist, will eine am Schlusse eines jeden Jahres zahlbare Verbindungsrente bis zum zweiten Tode in der Höhe von K 3.000·— beheben. Wie groß ist bei einem 10prozentigen Regiezuschlage die Einmalprämie?

Unter Anwendung der Gleichung

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}$$

und nach Tafel IXa, b und c erhält man

$$a_{\overline{45:40}} = (15·913 - 1) + (17·788 - 1) - (13·513 - 1) = 19·188.$$

Die Einmalprämie beträgt für die versicherte Rente von K 3.000·— bei 10prozentigem Regiezuschlage K 63.320·40.

Würde die überlebende Person eine Rente von nur $\frac{2}{3}$ von K 3.000·—, d. i. K 2.000·— beziehen, so hat die einmalige Nettoprämie für die Renteneinheit nach der Formel

$$\frac{m}{n}(a_x + a_y) - \frac{2m-n}{n} a_{xy}$$

und nach denselben Tafeln den Wert von

$$\frac{2}{3}(a_{45} + a_{40}) - \frac{1}{3} a_{45:40} = 16·963.$$

Für diese Rentenkombination beträgt die Einmalprämie bei 10prozentigem Regiezuschlage K 55.977·90.

§ 75. *Überlebensrenten.*

Darunter versteht man Leibrenten auf eine Person, die nur dann an die *überlebende* Person zur Auszahlung gelangen, wenn eine der beiden miteinander verbundenen Personen stirbt.

1. Ist es gleich, welcher überlebenden von den beiden Personen die Leibrente ausgezahlt wird, so heißt sie eine *gegenseitige Überlebensrente* und wird für die Einheit mit $\mathrm{a}_{\frac{1}{xy}}$ oder $a_{\frac{1}{xy}}$ bezeichnet, je nachdem sie pränumerando oder postnumerando gezahlt wird.

Den gegenwärtigen Wert einer solchen Überlebensrente erhält man durch folgende Überlegung.

Würden sich die beiden Personen, von denen die eine x Jahre, die andere y Jahre alt ist, unabhängig voneinander versichern, so müßten sie dafür $\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y$ zahlen und hätten das Recht, eine im Betrage von $1 + 1 = 2$ Einheiten, deren Barwert $2\,\mathrm{a}_{xy}$ ist, zu beziehen. Mit dem Tode einer Person fällt aber diese Anwartschaft weg, daher ist

$$\mathrm{a}_{\frac{1}{xy}} = \mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y - 2\,\mathrm{a}_{xy}.$$

Ebenso findet man

$$a_{\frac{1}{xy}} = a_x + a_y - 2\,a_{xy}.$$

Drückt man in der unteren Gleichung die postnumerando zahlbaren Renten durch die Pränumerando-Rentenwerte aus, so erhält man

$$a_{\frac{1}{xy}} = (\mathrm{a}_x - 1) + (\mathrm{a}_y - 1) - 2\,(\mathrm{a}_{xy} - 1)$$

oder

$$a_{\frac{1}{xy}} = \mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y - 2\,\mathrm{a}_{xy},$$

woraus folgt, daß

$$a_{\frac{1}{xy}} = \mathrm{a}_{\frac{1}{xy}}$$

ist.

Beispiel.

Ein Ehepaar, von welchem der Mann, wie auch die Frau 40 Jahre alt ist, kauft eine Rente von K 2.000·—, welche jedoch erst vom Tode des Zuerststerbenden bis zum zweiten Tode ausgezahlt wird. Die erste Auszahlung findet am Ende des Sterbejahres der zuerst sterbenden Person statt. Welchen Betrag wird das Ehepaar bei 10prozentigem Regiezuschlage dafür zu zahlen haben?

Nach der Gleichung

$$a_{\frac{1}{xy}} = a_x + a_y - 2\,a_{xy}$$

und nach Tafeln IXa, b und c erhält man

$$a_{\frac{1}{40:40}} = 16·276 + 16·788 - 2\,.\,13·318 = 6·428.$$

Für die versicherte Rente von K 2.000·— beträgt bei 10prozentigem Regiezuschlage die Einmalprämie K 14.141·60.

2. Die Überlebensrente wird zu einer *einseitigen Überlebensrente* (Witwenpension oder Witwenrente), wenn dieselbe an eine bestimmte,

Einheit sich ergänzenden Betrage, d. i. von $\left(1-\frac{m}{n}\right)$, beziehen würde.

Der Wert dieser Versicherungskombination ist mithin bei einer Postnumerando-Zahlung der Rente

$$\frac{m}{n} a_{\overline{xy}} + \left(1-\frac{m}{n}\right) a_{xy}$$

oder, wenn man darin für $a_{\overline{xy}}$ den Wert $a_x + a_y - a_{xy}$ einsetzt,

$$\frac{m}{n}(a_x + a_y - a_{xy}) + \left(1-\frac{m}{n}\right) a_{xy}$$

und endlich

$$\frac{m}{n}(a_x + a_y) - \frac{2m-n}{n} a_{xy}$$

Beispiel.

Ein Ehepaar, von welchem der Mann 45, die Frau 40 Jahre alt ist, will eine am Schlusse eines jeden Jahres zahlbare Verbindungsrente bis zum zweiten Tode in der Höhe von *K* 3.000·— beheben. Wie groß ist bei einem 10prozentigen Regiezuschlage die Einmalprämie?

Unter Anwendung der Gleichung

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}$$

und nach Tafel IX*a*, *b* und *c* erhält man

$$a_{\overline{45:40}} = (15{\cdot}913 - 1) + (17{\cdot}788 - 1) - (13{\cdot}513 - 1) = 19{\cdot}188.$$

Die Einmalprämie beträgt für die versicherte Rente von *K* 3.000·— bei 10prozentigem Regiezuschlage *K* 63.320·40.

Würde die überlebende Person eine Rente von nur $\frac{2}{3}$ von *K* 3.000·—, d. i. *K* 2.000·— beziehen, so hat die einmalige Nettoprämie für die Renteneinheit nach der Formel

$$\frac{m}{n}(a_x + a_y) - \frac{2m-n}{n} a_{xy}$$

und nach denselben Tafeln den Wert von

$$\frac{2}{3}(a_{45} + a_{40}) - \frac{1}{3} a_{45:40} = 16{\cdot}963.$$

Für diese Rentenkombination beträgt die Einmalprämie bei 10prozentigem Regiezuschlage *K* 55.977·90.

§ 75. *Überlebensrenten.*

Darunter versteht man Leibrenten auf eine Person, die nur dann an die *überlebende* Person zur Auszahlung gelangen, wenn eine der beiden miteinander verbundenen Personen stirbt.

1. Ist es gleich, welcher überlebenden von den beiden Personen die Leibrente ausgezahlt wird, so heißt sie eine *gegenseitige Überlebensrente* und wird für die Einheit mit $\mathrm{a}_{\overset{1}{xy}}$ oder $a_{\overset{1}{xy}}$ bezeichnet, je nachdem sie pränumerando oder postnumerando gezahlt wird.

Den gegenwärtigen Wert einer solchen Überlebensrente erhält man durch folgende Überlegung.

Würden sich die beiden Personen, von denen die eine x Jahre, die andere y Jahre alt ist, unabhängig voneinander versichern, so müßten sie dafür $\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y$ zahlen und hätten das Recht, eine im Betrage von $1 + 1 = 2$ Einheiten, deren Barwert $2\,\mathrm{a}_{xy}$ ist, zu beziehen. Mit dem Tode einer Person fällt aber diese Anwartschaft weg, daher ist

$$\mathrm{a}_{\overset{1}{xy}} = \mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y - 2\,\mathrm{a}_{xy}.$$

Ebenso findet man

$$a_{\overset{1}{xy}} = a_x + a_y - 2\,a_{xy}.$$

Drückt man in der unteren Gleichung die postnumerando zahlbaren Renten durch die Pränumerando-Rentenwerte aus, so erhält man

$$a_{\overset{1}{xy}} = (\mathrm{a}_x - 1) + (\mathrm{a}_y - 1) - 2\,(\mathrm{a}_{xy} - 1)$$

oder

$$a_{\overset{1}{xy}} = \mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y - 2\,\mathrm{a}_{xy},$$

woraus folgt, daß

$$a_{\overset{1}{xy}} = \mathrm{a}_{\overset{1}{xy}}$$

ist.

Beispiel.

Ein Ehepaar, von welchem der Mann, wie auch die Frau 40 Jahre alt ist, kauft eine Rente von *K* 2.000·—, welche jedoch erst vom Tode des Zuerststerbenden bis zum zweiten Tode ausgezahlt wird. Die erste Auszahlung findet am Ende des Sterbejahres der zuerst sterbenden Person statt. Welchen Betrag wird das Ehepaar bei 10prozentigem Regiezuschlage dafür zu zahlen haben?

Nach der Gleichung

$$a_{\overset{1}{xy}} = a_x + a_y - 2\,a_{xy}$$

und nach Tafeln IX*a*, *b* und *c* erhält man

$$a_{\overset{1}{40:40}} = 16{\cdot}276 + 16{\cdot}788 - 2 \,.\, 13{\cdot}318 = 6{\cdot}428.$$

Für die versicherte Rente von *K* 2.000·— beträgt bei 10prozentigem Regiezuschlage die Einmalprämie *K* 14.141·60.

2. Die Überlebensrente wird zu einer *einseitigen Überlebensrente* (Witwenpension oder Witwenrente), wenn dieselbe an eine bestimmte,

z. B. $y$jährige Person lebenslänglich ausgezahlt wird, im Falle, daß sie eine andere $x$jährige Person überlebt. Der Rentenbezug beginnt mit dem Anfang des dem Sterbejahre folgenden Versicherungsjahres. Ist der zu zahlende Rentenbetrag die Einheit, so bezeichnet man die einmalige Prämie mit $a_{x|y}$ oder $a_{x|y}$, je nachdem die Rente pränumerando oder postnumerando gezahlt wird und nennt die $y$jährige Person, die in den Genuß der Rente gelangt, die *begünstigte* Person. Die einmalige Nettoprämie $a_{x|y}$ dieser Versicherung kann durch folgende Überlegung gefunden werden.

Schließt eine von den beiden x- und $y$jährigen Personen, z. B. die $y$jährige Person, mit einer Rentenanstalt die Versicherung ab, eine lebenslängliche jährliche Rente im Betrage einer Einheit zu erhalten, so muß sie dafür a_y zahlen. Die Rente wird jedoch, solange beide Personen am Leben sind, nicht ausgezahlt. Der Barwert a_y muß somit um die Verbindungsrente a_{xy} vermindert werden.

Die einmalige Nettoprämie hat daher den Wert

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy}.$$

Man kann zu dieser Gleichung auch gelangen, wenn man von den einzelnen Auszahlungen ausgeht. Die Wahrscheinlichkeit, daß die $x$jährige Person innerhalb der nächsten n Jahre stirbt und die $y$jährige Person noch lebt, ist

$${}_np_{xy} = (1 - {}_np_x)\,{}_np_y$$

oder

$${}_np_{xy} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

und der gegenwärtige Wert der nach n Jahren stattfindenden möglichen Auszahlung ist

$$v^n \cdot \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} =$$

$$= \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{D_{y+n}}{D_y} = \frac{D_{y+n}}{D_y} - \frac{l_{x+n}\,D_{y+n}}{l_x\,D_y} = \frac{D_{y+n}}{D_y} - \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}.$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke für n der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, ... und addieren dann die so erhaltenen Resultate, so ergibt sich für die gesuchte Rente der Wert

$$a_{x|y} = \frac{\Sigma D_y}{D_y} - \frac{\Sigma D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

oder

$$a_{x|y} = \frac{N_y}{D_y} - \frac{N_{xy}}{D_{xy}}$$

oder endlich

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy}.$$

Ebenso erhält man auch den Wert für die Postnumerando-Rente

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy}.$$

Werden die Überlebensrenten durch *Jahresprämien* erworben, die solange gezahlt werden, als beide Personen leben, so hat man bei der gegenseitigen Überlebensrente für die Jahresprämie, die man mit $P_{\overset{1}{xy}}$ bezeichnet, den Wert

$$P_{\overset{1}{xy}} = \frac{a_{\overset{1}{xy}}}{a_{xy}}$$

oder, wenn man darin für $a_{\overset{1}{xy}}$ den Wert $a_x + a_y - 2\,a_{xy}$ einsetzt,

$$P_{\overset{1}{xy}} = \frac{a_x + a_y}{a_{xy}} - 2$$

und bei der einseitigen Überlebensrente die Jahresprämie, die wir mit $P_{x|y}$ bezeichnen,

$$P_{x|y} = \frac{a_{x|y}}{a_{xy}}$$

oder, wenn man darin $a_{x|y} = a_y - a_{xy}$ setzt,

$$P_{x|y} = \frac{a_y}{a_{xy}} - 1.$$

Beispiel.

Ein 35jähriger Mann will seiner 30jährigen Frau eine Witwenrente von K 2.000·— kaufen. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn 10, beziehungsweise 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden?

Unter Anwendung der Gleichung

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy}$$

und nach Tafeln IXb und c erhält man für die Einmalprämie den Wert

$$a_{35|30} = 19{\cdot}881 - 15{\cdot}961 = 3{\cdot}920.$$

Die Einmalprämie, die der Mann für die Witwenrente von K 2.000·— zu zahlen hat, beträgt mithin samt 10prozentigem Zuschlage K 8.624·—.

Um die Jahresprämie zu erhalten, wendet man die Gleichung

$$P_{x|y} = \frac{a_y}{a_{xy}} - 1$$

an und erhält nach denselben Tafeln zunächst die Jahres-Nettoprämie für die Renteneinheit

$$P_{35|30} = \frac{19{\cdot}881}{15{\cdot}961} - 1 = 0{\cdot}2456.$$

Für die versicherte Rente von K 2 000·— beträgt dann die jährliche Bruttoprämie K 564·88.

§ 76. *Aufgeschobene, kurze und unterjährig fällige einseitige Überlebensrente.*

1. Die einmalige Prämie ${}_{m|}a_{x|y}$ einer *aufgeschobenen einseitigen Überlebensrente,* welche frühestens m Jahre nach dem Versicherungsabschlusse unter der Bedingung ausgezahlt wird, daß die $x$jährige Person vorher stirbt und die $y$jährige dann noch lebt, ist gleich der Differenz aus der um m Jahre aufgeschobenen Leibrente für die $y$jährige Person und der um m Jahre aufgeschobenen Verbindungsrente für beide Personen.

Es ist also

$$ {}_{m|}a_{x|y} = {}_{m|}a_{y} - {}_{m|}a_{xy}. $$

Wird jedoch die Bedingung gestellt, daß die $y$jährige Person nur dann das Recht hat, eine Rente zu beziehen, wenn die $x$jährige Person innerhalb der nächsten m Jahre *nicht* stirbt, also nach m Jahren noch lebt, so ist, da die Rente nach m Jahren den Wert

$$ a_{x+m|y+m} = a_{y+m} - a_{x+m:y+m} $$

hat, beim Versicherungsabschlusse die einmalige Prämie

$$ {}_{m|}a_{x|y} = \frac{D_{x+m:y+m}}{D_{xy}} \cdot a_{x+m|y+m} $$

oder

$$ {}_{m}a_{x|y} = \frac{D_{x+m} \cdot l_{y+m}}{D_{x} \cdot l_{y}} (a_{y+m} - a_{x+m:y+m}). $$

Stirbt die $x$jährige Person innerhalb der m Jahre, so gelangt die Rente überhaupt nicht zur Auszahlung.

Wird diese Rente durch Jahresprämien erworben, die solange gezahlt werden als Versorger und Versorgte am Leben sind, so hat die Jahresprämie, die wir mit ${}_{m}P_{xy}$ bezeichnen, den Wert

$$ {}_{m|}P_{xy} = \frac{{}_{m}a_{xy}}{a_{xy}} $$

oder

$$ {}_{m}P_{x,y} = \frac{D_{x+m}\, l_{y+m}}{D_{x}\, l_{y}} \cdot \frac{a_{x+m} - a_{x+m:y+m}}{a_{xy}}. $$

2. Soll die begünstigte $y$jährige Person nur bis zum Alter von $(y+n)$ Jahren eine jährliche Rente beziehen, falls der $x$jährige Versorger innerhalb der nächsten n Jahre stirbt, so ist der Wert dieser Rente gleich dem Werte einer sofort beginnenden, auf n Jahre abgekürzten Rente der begünstigten Person ${}_{n}a_{y}$ vermindert um den Wert der temporären Verbindungsrente für beide Personen ${}_{|n}a_{xy}$.

Mithin beträgt die Einmalprämie der *kurzen einseitigen Überlebensrente* (Waisenrente), deren Wert wir mit ${}_{n}a_{x|y}$ bezeichnen,

$$ {}_{|n}a_{x|y} = {}_{|n}a_{y} - {}_{|n}a_{xy} $$

oder teilweise durch Grundzahlen ausgedrückt

$$ {}_{|n}a_{x|y} = \frac{N_{y} - N_{y+n}}{D_{y}} - \left(a_{xy} - \frac{D_{x+n}\, l_{y+n}}{D_{x}\, l_{y}} a_{x+n:y+n}\right). $$

Die Rente kann höchstens nur $(n-1)$mal ausgezahlt werden, gelangt eventuell auch gar nicht zur Auszahlung, wenn die $x$jährige Person innerhalb dieser Zeit nicht oder erst nach dem Tode der begünstigten $y$jährigen Person sterben sollte.

3. Wenn die einmalige Überlebensrente (Witwenrente) nicht mit dem Jahresbetrage von einer Kapitalseinheit, sondern mit dem am Anfange eines jeden $n$tel Jahres zahlbaren Betrage von $\frac{1}{n}$ beginnt, so ist der Wert dieser *unterjährigen einseitigen Überlebensrente,* den wir mit $a^{(n)}_{x|y}$ bezeichnen,

$$ a^{(n)}_{x|y} = a^{(n)}_{y} - a^{(n)}_{xy}. $$

Hiebei wird vorausgesetzt, daß der Beginn der Zahlung der Rente am Anfange jenes Jahres-$n$tels stattfindet, welches dem Jahres-$n$tel folgt, in welchem die $x$jährige Person gestorben ist. Setzt man in die letzte Gleichung für die unterjährigen Renten $a^{(n)}_{y}$ und $a^{(n)}_{xy}$ die entsprechenden Werte $a_{y} - \frac{n-1}{2n}$ und $a_{xy} - \frac{n-1}{2n}$ ein, so erhält man

$$ a^{(n)}_{x|y} = \left(a_{y} - \frac{n-1}{2n}\right) - \left(a_{xy} - \frac{n-1}{2n}\right) $$

oder

$$ a^{(n)}_{x|y} = a_{y} - a_{xy} = a_{x|y}. $$

Wie man sieht, bleibt der Wert der unterjährigen Rente der gleiche, ob die Zahlung ganzjährig oder $n$teljährig erfolgt.

Beispiel.

Wie groß ist die einmalige und wie groß die jährliche Prämie, die ein 40jähriger Mann für eine Witwenpension von jährlich K 2.000·— zugunsten seiner 35jährigen Frau an eine Versicherungsanstalt zahlen muß, wenn die Anstalt die Bedingung stellt, daß der Mann innerhalb der nächsten 5 Jahre nicht stirbt und wenn ferner 10, beziehungsweise 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden?

Unter Anwendung der Gleichung

$${}_{m}a_{xy} = \frac{D_{x+m}\, l_{y+m}}{D_x\, l_y}\,(a_{y+m} - a_{x+m:y+m})$$

erhält man nach Tafeln IX*a*, *b* und *c* für die Einmalprämie den Wert

$${}_{5}a_{40|35} = \frac{17429 \times 86424}{21847 \times 90585}\,(17\cdot788 - 13\cdot513) = 3\cdot25383.$$

Wendet man die Gleichung

$${}_{m|}P_{x|y} = \frac{D_{x+m}\, l_{y+m}}{D_x\, l_y} : \frac{a_{y+m} - a_{x+m:y+m}}{a_{xy}}$$

an, so erhält man nach denselben Tafeln für die Jahresprämie den Wert

$${}_{5|}P_{40|35} = \frac{3\cdot25383}{14\cdot788} = 0\cdot22003.$$

Für die versicherte Rente von *K* 2.000·— beträgt die einmalige Bruttoprämie *K* 7.158·43, während die jährliche Bruttoprämie den Wert von *K* 506·07 hat.

2. Einmal- und Jahresprämien für Überlebens- und Todesfallversicherungen.

§ 77. *Gegenseitige Überlebensversicherung.*

Eine Anwartschaft, die beim Tode *einer* das Paar bildenden Personen fällig ist, wird eine *Überlebensversicherung* genannt.

Versichert sich ein im Alter von x und y Jahren stehendes Paar derartig, daß die Versicherungssumme, z. B. eine Kapitalseinheit, am Schlusse jenes Versicherungsjahres ausgezahlt wird, in welchem das Paar durch den Tod einer Person, gleichgiltig welcher, aufgelöst ist, so heißt diese Todesfallversicherung auf das kürzere Leben eine *gegenseitige Überlebensversicherung.*

Wenn der *erste* Todesfall nach Ablauf von m Jahren, d. i. im $(m+1)$ten Versicherungsjahre eintritt, so ist der auf den Tag des Versicherungsabschlusses bezogene Wert dieser am Schlusse des $(m+1)$ten Versicherungsjahres fälligen Anwartschaft gleich dem Produkte aus der Wahrscheinlichkeit der Fälligkeit der versicherten Kapitalseinheit und dem entsprechenden Abzinsungsfaktor.

Nun ist aber diese Wahrscheinlichkeit gleich der Wahrscheinlichkeit

$${}_{m|}q_{xy} = \frac{l_{x+m}\, l_{y+m} - l_{x+m+1}\, l_{y+m+1}}{l_x\, l_y},$$

daß das Paar nach Ablauf von m Jahren durch den ersten Tod aufgelöst wird.

Der Barwert dieser Anwartschaft bildet die Einmalprämie einer sogenannten „*kurzen gegenseitigen Überlebensversicherung auf ein Jahr*", die wir, analog dem einfachen Leben, mit ${}_{m}T_{xy}$ bezeichnen.

Man erhält mithin den Wert

$${}_{m}T_{xy} = {}_{m|}q_{xy} \,.\, v^{m+1}$$

oder

$${}_{m}T_{xy} = \frac{(l_{x+m}\, l_{y+m} - l_{x+m+1}\, l_{y+m+1})\, v^{m+1}}{l_x\, l_y}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches, der auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, mit v^x, so bekommt man

$${}_{m}T_{xy} = \frac{(l_{x+m}\, l_{y+m} - l_{x+m+1}\, l_{y+m+1})\, v^{x+m+1}}{v^x\, l_x\, l_y}.$$

Bezeichnet man die Zahl der im $(m+1)$ten Versicherungsjahre aufgelösten Paare $l_{x+m}\, l_{y+m} - l_{x+m+1}\, l_{y+m+1}$ mit $d_{x+m:y+m}$, ferner $(l_x\, l_y - l_{x+1}\, l_{y+1})\, v^{x+1} = d_{xy}\, v^{x+1}$ mit C_{xy} — „*diskontiertes Paar der Toten*" oder nach *De Morgan*

$$v^{\frac{x+y}{2}+1}\, d_{xy} \text{ mit } C_{xy},$$

so erhält man für die Einmalprämie dieser kurzen gegenseitigen Überlebensversicherung auf ein Jahr den Wert

$${}_{m}T_{xy} = \frac{C_{x+m:y+m}}{D_{xy}}.$$

Bei der gegenseitigen Überlebensversicherung wird, wie bereits erwähnt, das versicherte Kapital der überlebenden Person am Schlusse jenes Versicherungsjahres ausbezahlt, in welchem der erste Tod eintritt. Da aber derselbe im ersten, zweiten usw. Versicherungsjahre eintreten kann, so setzt sich die einmalige Nettoprämie dieser Versicherung, die wir mit A_{xy} bezeichnen, aus den einzelnen Einmalprämien für die jeweiligen kurzen Überlebensversicherungen auf ein Jahr zusammen.

Es ist daher die Einmalprämie

$$A_{xy} = {}_{0}T_{xy} + {}_{1}T_{xy} + {}_{2}T_{xy} + \cdots\cdots$$

oder

$$A_{xy} = \frac{C_{xy} + C_{x+1:y+1} + C_{x+2:y+2} + \cdots\cdots}{D_{xy}}.$$

Setzen wir „*die Summe der diskontierten Paare der Toten*"

$$C_{xy} + C_{x+1:y+1} + C_{x+2:y+2} + \cdots\cdots = \Sigma C_{xy} = M_{xy},$$

so erhält man für die Einmalprämie einer gegenseitigen Überlebensversicherung den Wert

$$A_{xy} = \frac{M_{xy}}{D_{xy}}.$$

Führt man die Zahlen der *„diskontierten Paare der Lebenden"* ein, so erhält man, da

$$C_{xy} = v^{x+1} d_{xy} = v^{x+1}(l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1})$$

oder

$$C_{xy} = v \cdot v^x l_x l_y - v^{x+1} l_{x+1} l_{y+1}$$

oder auch

$$C_{xy} = v D_{xy} - D_{x+1:y+1}$$

ist, für

$$M_{xy} = v \Sigma D_{xy} - \Sigma D_{x+1:y+1} = v \mathbb{N}_{xy} - \mathbb{N}_{xy} + D_{xy}$$

oder

$$M_{xy} = D_{xy} - (1 - v) \mathbb{N}_{xy}$$

oder auch

$$M_{xy} = D_{xy} - d \mathbb{N}_{xy},$$

mithin für die Prämie den Wert

$$A_{xy} = 1 - d \frac{\mathbb{N}_{xy}}{D_{xy}}$$

und endlich

$$A_{xy} = 1 - d\, a_{xy}.$$

Wie man sieht, ist diese Gleichung jener für die lebenslängliche Todesfallversicherung für einfaches Leben

$$A_x = 1 - d\, a_x,$$

analog.

Wird diese Versicherung gegen Zahlung von Jahresprämien erworben, so findet man dieselbe, wenn wir sie mit P_{xy} bezeichnen, durch Division der zugehörigen Einmalprämie durch die Verbindungsrente.

Mithin ist

$$P_{xy} = \frac{A_{xy}}{a_{xy}}$$

oder

$$P_{xy} = \frac{1}{a_{xy}} - d.$$

Auch hier zeigt diese Gleichung einen analogen Bau, wie jene einer lebenslänglichen Todesfallversicherung für einfaches Leben.

Beispiel.

Ein im Alter von 35, beziehungsweise von 30 Jahren stehendes Ehepaar schließt mit einer Versicherungsanstalt einen Vertrag ab, nach welchem die überlebende Person nach dem ersten Todesfalle am Schlusse des Sterbejahres eine Summe von K 10.000·— erhält. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn 10, beziehungsweise 16 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden?

Um die Einmalprämie zu bekommen, wendet man die Gleichung

$$A_{xy} = 1 - d\, a_{xy}$$

an und erhält nach Tafel XII*b* dafür den Wert

$$A_{35:30} = 1 - 0{\cdot}0338164 \times 16{\cdot}181 = 0{\cdot}452817,$$

während man bei der Jahresprämie die Gleichung

$$P_{xy} = \frac{1}{a_{xy}} - d$$

anwendet und dafür nach derselben Tafel den Wert findet,

$$P_{35:30} = \frac{1}{16{\cdot}181} - 0{\cdot}0338164 = 0{\cdot}0279845.$$

Für die versicherte Summe von K 10.000·— beträgt die einmalige Bruttoprämie K 4.980·99, während die Jahres-Bruttoprämie den Wert von K 447·75 hat.

§ 78. *Aufgeschobene und kurze gegenseitige Überlebensversicherung.*

1. Die versicherte Kapitalseinheit wird bei der um m Jahre aufgeschobenen gegenseitigen Überlebensversicherung $_{m|}A_{xy}$ nur dann ausgezahlt, wenn das verbundene, im Alter von x und y Jahren stehende Paar durch die zuerst sterbende Person später als nach m Jahren aufgelöst wird.

Den Wert der einmaligen Nettoprämie für diese Versicherung erhält man dem für $_{m|}A_x$ analog

$$_{m|}A_{xy} = \frac{M_{x+m:y+m}}{D_{xy}}$$

oder

$$_{m|}A_{xy} = \frac{D_{x+m:y+m}}{D_{xy}} A_{x+m:y+m}$$

oder auch

$$_{m|}A_{xy} = \frac{D_{x+m}\, l_{y+m}}{D_x\, l_y}(1 - d\, a_{x+m:y+m}).$$

Die jährliche Nettoprämie $_{m|}P_{xy}$ dieser Versicherungsart findet man, wenn man die Einmalprämie durch die Verbindungsrente dividiert.

Es ist also

$$_{m|}P_{xy} = \frac{D_{x+m}\, l_{y+m}}{D_x\, l_y} \cdot \frac{1 - d\, a_{x+m:y+m}}{a_{xy}}.$$

2. Bei der auf n Jahre *abgekürzten gegenseitigen Überlebensversicherung* gelangt die versicherte Kapitalseinheit nur dann zur Auszahlung, wenn das Paar durch den ersten Todesfall innerhalb der nächsten n Jahre aufgelöst wird.

Ihr Wert, den wir mit ${}_{|n}A_{xy}$ bezeichnen, ist

$${}_{|n}A_{xy} = \frac{M_{xy} - M_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

oder

$${}_{|n}A_{xy} = A_{xy} - {}_{n|}A_{xy}$$

oder auch durch Rentenwerte ausgedrückt,

$${}_{|n}A_{xy} = 1 - d\,a_{xy} - \frac{D_{x+n}\,.\,l_{y+n}}{D_x\,l_y}\,(1 - d\,a_{x+n:y+n})$$

oder endlich

$${}_{|n}A_{xy} = 1 - \frac{D_{x+n}\,l_{y+n}}{D_x\,l_y} - d\left(a_{xy} - \frac{D_{x+n}\,l_{y+n}}{D_x\,l_y}\,a_{x+n:y+n}\right).$$

Beispiel.

Ein Ehepaar, von welchem der Mann 35, die Frau 33 Jahre alt ist, geht eine um 5 Jahre aufgeschobene gegenseitige Überlebensversicherung auf K 10.000·— ein. Wie groß ist die einmalige und wie groß die jährliche Prämie bei 10, beziehungsweise 15prozentigem Regiezuschlage?

Die Einmalprämie erhält man nach der Gleichung

$${}_{m|}A_{xy} = \frac{D_{x+m}\,l_{y+m}}{D_x\,l_y}\,(1 - d\,a_{x+m:y+m})$$

und nach Tafeln XII*a* und *b*

$${}_{5|}A_{35:33} = \frac{21587 \times 86952}{26696 \times 90239}\,(1 - 0·0338164 \times 14·508) = 0·396902.$$

Um die Jahresprämie zu ermitteln, wendet man die Gleichung

$${}_{m}P_{xy} = \frac{D_{x+m}\,l_{y+m}}{D_x\,l_y}\;\frac{1 - d\,a_{x+m:y+m}}{a_{xy}}$$

an und bekommt nach denselben Tafeln

$${}_{5|}P_{35:33} = \frac{21587 \times 86952}{26696 \times 90239}\;\frac{1 - 0·0338164 \times 14·508}{15·846} = 0·025047.$$

Für die versicherte Summe von K 10.000·— erhält man für die Einmalprämie den Betrag von K 4.365·92 und für die Jahresprämie den Betrag von K 288·04.

§ 79. *Gemischte gegenseitige Überlebensversicherung.*

In diesem Falle gelangt die versicherte Kapitalseinheit unter jeder Bedingung zur Auszahlung, und zwar, entweder wenn das Paar innerhalb der nächsten n Jahre durch den ersten Tod aufgelöst wird, oder nach n Jahren, wenn beide Personen am Leben sind.

Diese Versicherung, deren einmalige Nettoprämie wir mit $A_{xy\overline{n}|}$ bezeichnen, setzt sich zusammen aus der auf n Jahre abgekürzten gegenseitigen Überlebensversicherung und aus der um n Jahre aufgeschobenen Erlebensversicherung.

Ihr Wert ist mithin

$$A_{xy\overline{n}|} = {}_{|n}A_{xy} + {}_{n}E_{xy}$$

oder

$$A_{xy\overline{n}|} = \frac{M_{xy} - M_{x+n:y+n} + D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

und durch Zahlen der „*diskontierten Paare der Lebenden*" ausgedrückt

$$A_{xy\overline{n}|} = \frac{D_{xy} - d\,\mathbb{N}_{xy} - D_{x+n:y+n} + d\,\mathbb{N}_{x+n:y+n} + D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

oder

$$A_{xy\overline{n}|} = 1 - d\,\frac{\mathbb{N}_{xy} - \mathbb{N}_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$$

oder auch

$$A_{xy\overline{n}|} = 1 - d\,{}_{|n}a_{xy}$$

oder endlich

$$A_{xy\overline{n}|} = 1 - d\left(a_{xy} - \frac{D_{x+n}\,l_{y+n}}{D_x\,l_y}\,a_{x+n:y+n}\right).$$

Wird diese Versicherung durch eine jährliche Prämienzahlung erworben, so erhält man die jährliche Nettoprämie $P_{xy\overline{n}|}$, wenn man die Einmalprämie durch die auf n Jahre abgekürzte Verbindungsrente dividiert.

Es ist also

$$P_{xy\overline{n}|} = \frac{A_{xy\overline{n}|}}{{}_{|n}a_{xy}}$$

oder

$$P_{xy\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{|n}a_{xy}} - d$$

oder auch

$$P_{xy\overline{n}|} = \frac{1}{a_{xy} - \frac{D_{x+n}\,l_{x+n}}{D_x\,l_y}\,a_{x+n:y+n}} - d.$$

Beispiel.

Ein im Alter von 30, beziehungsweise 28 Jahren stehendes Ehepaar will nach Ablauf von 25 Jahren in den Besitz von K 10.000·— gelangen. Tritt inzwischen ein Sterbefall ein, so bekommt der überlebende Teil den Betrag von K 10.000·—. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn 10, beziehungsweise 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden?

Unter Anwendung der Gleichung

$$A_{xy\overline{n}|} = 1 - d\left(a_{xy} - \frac{D_{x+n}\, l_{y+n}}{D_x\, l_y}\, a_{x+n:y+n}\right)$$

und nach Tafeln XII*a* und *b* erhält man für die Einmalprämie den Wert

$$A_{30:28,\overline{35}|} = 1 - 0{\cdot}0338164\left(17{\cdot}102 - \frac{10541 \times 72592}{32757 \times 92974} \times 9{\cdot}980\right) = 0{\cdot}506450.$$

Um die Jahresprämie zu erhalten, wendet man die Gleichung

$$P_{xy\overline{n}|} = \frac{1}{a_{xy} - \dfrac{D_{x+n}\, l_{y+n}}{D_x\, l_y}\, a_{x+n:y+n}} - d,$$

an und erhält nach denselben Tafeln

$$P_{30:28,\overline{25}|} = \frac{1}{17{\cdot}102 - \dfrac{10541 \times 75592}{32757 \times 92974} \times 9{\cdot}980} - 0{\cdot}0338164 = 0{\cdot}0296135.$$

Für das versicherte Kapital von *K* 10.000·— beträgt die einmalige Bruttoprämie *K* 5.570·95 und die jährliche *K* 340·55.

§ 80. *Todesfallversicherung auf das längste zweier Leben.*

Hier wird das versicherte Kapital am Ende jenes Jahres ausbezahlt, in welchem der *zweite* Tod eintritt.

Um den Wert dieser Versicherung für die Kapitalseinheit berechnen zu können, stellen wir uns vor, daß sich jede der beiden Personen, von denen die eine x, die andere y Jahre alt ist, unabhängig voneinander auf die Einheit mit den Barwerten A_x und A_y versichert. Die Versicherungsanstalt müßte dann am Schlusse des Jahres der zuerst sterbenden Person und am Ende des Jahres der zuletzt sterbenden jedesmal den Betrag von einer Einheit zahlen; sie hätte also um eine Einheit auf das kürzeste Leben, deren Barwert A_{xy} ist, zu viel gezahlt.

Es ergibt sich mithin für die einmalige Nettoprämie, die wir mit $A_{\overline{xy}}$ bezeichnen, der Wert

$$A_{\overline{xy}} = A_x + A_y - A_{xy}$$

und durch Rentenwerte ausgedrückt

$$A_{\overline{xy}} = (1 - d\, a_x) + (1 - d\, a_y) - (1 - d\, a_{xy})$$

oder

$$A_{\overline{xy}} = 1 - d\,(a_x + a_y - a_{xy})$$

oder auch, wenn man darin für $a_x + a_y - a_{xy}$ den Wert $a_{\overline{xy}}$ einsetzt,

$$A_{\overline{xy}} = 1 - d\, a_{\overline{xy}}.$$

Bei der Berechnung der Jahresprämie, die wir mit $P_{\overline{xy}}$ bezeichnen,

muß man vorerst feststellen, ob dieselbe bis zum ersten oder bis zum zweiten Tode gezahlt wird.

Im Falle, daß die Jahresprämien nur bis zum *ersten* Tode gezahlt werden, ist der Wert einer solchen Prämie

$$P_{\overline{xy}} = \frac{A_{\overline{xy}}}{a_{xy}}$$

oder

$$P_{\overline{xy}} = \frac{1 - d\,(a_x + a_y)}{a_{xy}} + d.$$

Falls aber die Prämien bis zum *zweiten* Tode gezahlt werden, so ist ihr Wert

$$P_{\overline{xy}} = \frac{A_{\overline{xy}}}{a_{\overline{xy}}}$$

oder

$$P_{xy} = \frac{1}{a_x + a_y - a_{xy}} - d.$$

Beispiel.

Ein Ehepaar, von welchem der Mann 35, die Frau 34 Jahre alt ist, will ihren Erben ein Kapital von *K* 10.000·— unter der Bedingung hinterlassen, daß es erst nach dem zweiten Tode am Schlusse des Sterbejahres zur Auszahlung gelangt.

Wie groß ist bei 10, beziehungsweise 15prozentigem Regiezuschlage die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn letztere bis zum ersten, beziehungsweise bis zum zweiten Tode gezahlt wird?

Die Einmalprämie findet man nach der Gleichung

$$A_{\overline{xy}} = 1 - d\,(a_x + a_y - a_{xy})$$

und nach Tafeln XII*a* und *b*

$$A_{\overline{35:34}} = 1 - 0{\cdot}0338164\,(18{\cdot}591 + 18{\cdot}835 - 15{\cdot}723) = 0{\cdot}266083.$$

Für die Berechnung der Jahresprämie, die bis zum ersten Tode gezahlt wird, wendet man die Gleichung

$$P_{\overline{xy}} = \frac{1 - d\,(a_x + a_y)}{a_{xy}} + d$$

an und erhält nach denselben Tafeln

$$P_{\overline{35:34}} = \frac{1 - 0{\cdot}0338164\,(18{\cdot}591 + 18{\cdot}835)}{15{\cdot}723} - 0{\cdot}0338164 = 0{\cdot}016923,$$

während man unter Anwendung der Gleichung

$$P_{\overline{xy}} = \frac{1}{a_x + a_y - a_{xy}} - d$$

und der gleichen Tafeln die Jahresprämie erhält, die bis zum zweiten Tode gezahlt wird; also

$$P_{\overline{35:34}} = \frac{1}{18{\cdot}591 + 18{\cdot}835 - 15{\cdot}723} - 0{\cdot}0338164 = 0{\cdot}012260.$$

Beträgt die Versicherungssumme K 10.000·—, so ist die Einmalprämie bei 10prozentigem Regiezuschlage K 2.926·91, während die Jahresprämie bei 15prozentigem Zuschlage den Wert von K 191·96, beziehungsweise von K 140·99 hat.

§ 81. *Einseitige Überlebensversicherung.*

Bei dieser Versicherung verpflichtet sich die Versicherungsanstalt einem verbundenen Paare, welches aus einem $x$jährigen Manne und einer $y$jährigen Frau besteht, gegen Zahlung der Einmalprämie A^{1}_{xy}, der Frau, falls der Mann vor der Frau stirbt, am Schlusse des Sterbejahres eine Kapitalseinheit auszuzahlen.

In diesem Falle ist die Frau die *begünstigte.* Würde umgekehrt der Mann der *begünstigte* sein, so wäre die Prämie $A_{x\overset{1}{y}}$ zu bezahlen.

Würde man bei der Berechnung der Prämie von der Voraussetzung ausgehen, daß nach den im 1ten, 2ten, 3ten ...... Jahre verstorbenen Männern am Ende des 1ten, 2ten, 3ten, ... Jahres

$$d_x l_{y+1}, \qquad d_{x+1} l_{y+1}, \qquad d_{x+2} l_{y+3}, \qquad \ldots\ldots$$

Witwen vorhanden sind, so würde man eine etwas zu geringe Prämie erhalten, da die Auszahlung auch dann stattfinden soll, wenn die Frau in demselben Jahre, worin sie Witwe wurde, stirbt.

Die Anzahl der Sterbefälle beider Personen ist bei Annahme einer gleichmäßigen Verteilung derselben über ein Altersjahr im 1ten, 2ten, 3ten, ... Jahre

$$\frac{1}{2} d_x (l_y - l_{y+1}), \ \frac{1}{2} d_{x+1} (l_{y+1} - l_{y+2}), \ \frac{1}{2} d_{x+2} (l_{y+2} - l_{y+3}), \ \ldots\ldots$$

Es kommen mithin am Ende des 1ten, 2ten, 3ten, ... Jahres folgende Summen zur Auszahlung:

$$d_x l_{y+1} + \frac{1}{2} d_x (l_y - l_{y+1}), \qquad d_{x+1} l_{y+2} + \frac{1}{2} d_{x+1} (l_{y+1} - l_{y+2}),$$

$$d_{x+2} l_{y+3} + \frac{1}{2} d_{x+2} (l_{y+2} - l_{y+3}), \qquad \ldots\ldots$$

oder

$$\frac{1}{2} d_x (l_y + l_{y+1}), \ \frac{1}{2} d_{x+1} (l_{y+1} + l_{y+2}), \ \frac{1}{2} d_{x+2} (l_{y+2} + l_{y+3}), \ \ldots.$$

Addiert man die Barwerte derselben und dividiert deren Summe durch die $l_x l_y$ Paare, so erhält man für die Prämie den Wert

$$A^{1}_{xy} = \frac{1}{2} \frac{v\, d_x (l_y + l_{y+1}) + v^2 d_{x+1} (l_{y+1} + l_{y+2}) + v^3 d_{x+2} (l_{y+2} + l_{y+3}) + \cdots\cdot}{l_x l_y}$$

oder

$$A^{1}_{xy} = \frac{1}{2} \frac{v (l_x - l_{x+1}) (l_y + l_{y+1}) + v^2 (l_{x+1} - l_{x+2}) (l_{y+1} + l_{y+2}) +}{l_{x y}}$$

$$\frac{+ v^3 (l_{x+2} - l_{x+3}) (l_{y+2} + l_{y+3}) + \cdots\cdots}{l_x l_y}$$

oder auch

$$A^{1}_{ry} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{v (l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) + v^2 (l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2}) + v^3 (l_{x+2} l_{y+2} - l_{x+3} l_{y+3}) + \cdots}{l_x l_y} \right.$$

$$\left. + \frac{v l_x l_{y+1} + v^2 l_{x+1} l_{y+2} + v^3 l_{x+2} l_{y+3} + \cdots}{l_x l_y} - \frac{v\, l_{x+1} l_y + v^2 l_{x+2} l_{y+1} + v^3 l_{x+3} l_{y+2} + \cdots}{l_x l_y} \right\}$$

Nun nimmt der erste von den drei Brüchen innerhalb der Klammer

$$\frac{v (l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1}) - v^2 (l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2}) - v^3 (l_{x+2} l_{y+2} - l_{x+3} l_{y+3} + \cdots}{l_x l_y},$$

wenn man dessen Zähler und Nenner mit v^x multipliziert und

$$l_x l_y - l_{x+1} l_{y+1} = d_{xy},$$

$$l_{x+1} l_{y+1} - l_{x+2} l_{y+2} = d_{x+1:y+1},$$

$$l_{x+2} l_{y+2} - l_{x+3} l_{y+3} = d_{x+2:y+2},$$

setzt, die Form an

$$\frac{v^{x+1} d_{xy} + v^{x+2} d_{x+1:y+1} + v^{x+3} d_{x+2:y+2} + \cdots\cdots}{v^x l_x l_y}$$

oder

$$\frac{C_{xy} + C_{x+1:y+1} + C_{x+2:y+2} + \cdots\cdots}{D_{xy}},$$

wofür man auch A_{xy} setzen kann, also

$$\frac{C_{xy} + C_{x+1:y+1} + C_{x+2:y+2} + \cdots\cdots}{D_{xy}} = A_{xy}.$$

Die zwei anderen Brüche innerhalb der Klammer können, wie folgt, durch Rentenwerte ausgedrückt werden.

Es ist also

$$\frac{v\, l_x\, l_{y+1} + v^2\, l_{x+1}\, l_{y+2} + v^3\, l_{x+2}\, l_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x\, l_y} =$$

$$= \frac{l_x\, v^{y+1}\, l_{y+1} + l_{x+1}\, v^{y+2}\, l_{y+2} + l_{x+2}\, v^{y+3}\, l_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x\, v^y\, l_y}$$

oder

$$\frac{v\, l_x\, l_{y+1} + v^2\, l_{x+1}\, l_{y+2} + v^3\, l_{x+2}\, l_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x\, l_y} =$$

$$= \frac{l_x\, D_{y+1} + l_{x+1}\, D_{y+2} + l_{x+2}\, D_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x\, D_y}$$

oder auch, wenn man die rechte Seite der Gleichung mit $\frac{D_{y+1}}{D_{y+1}}$ multipliziert

$$\frac{v\, l_x\, l_{y+1} + v^2\, l_{x+1}\, l_{y+2} + v^3\, l_{x+2}\, l_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x\, l_y} =$$

$$= \frac{D_{y+1}}{D_y}\, \frac{D_{x:y+1} + D_{x+1:y+2} + D_{x+2:y+3} + \cdots\cdots}{D_{x:y+1}}$$

und endlich

$$\frac{v\, l_x\, l_{y+1} + v^2\, l_{x+1}\, l_{y+2} + v^3\, l_{x+2}\, l_{y+3} + \cdots\cdots}{l_x\, l_y} = \frac{D_{y+1}}{D_y}\, a_{x:y+1}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{v\, l_{x+1}\, l_y + v^2\, l_{x+2}\, l_{y+1} + x^3\, l_{x+3}\, l_{y+2} + \cdots\cdots}{l_x\, l_y} = \frac{D_{x+1}}{D_x}\, a_{x+1:y}.$$

Mithin erhält man für die Einmalprämie, wenn die Frau die begünstigte ist, den Wert

$$A^1_{xy} = \frac{1}{2}\left\{A_{xy} - \frac{D_{x+1}}{D_x}\, a_{x+1:y} + \frac{D_{y+1}}{D_y}\, a_{x:y+1}\right\}.$$

Ist der Mann der begünstigte, so ist die Einmalprämie

$$A_{x\overset{1}{y}} = \frac{1}{2}\left\{A_{xy} + \frac{D_{x+1}}{D_x}\, a_{x+1:y} - \frac{D_{y+1}}{D_y}\, a_{x:y+1}\right\}.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$A^1_{xy} + A_{x\overset{1}{y}} = A_{xy},$$

das heißt, das versicherte Kapital wird ausbezahlt, ob die $x$jährige oder die $y$jährige Person als erste stirbt; man bekommt jedenfalls eine gegenseitige Überlebensversicherung.

Für die einseitige Überlebensversicherung hat die Jahresprämie, die nur bis zum ersten Tode gezahlt werden kann und die wir mit P^1_{xy} oder mit $P_{x\overset{1}{y}}$ bezeichnen, je nachdem die $y$jährige oder die $x$jährige Person die begünstigte ist, den Wert

$$P^1_{xy} = \frac{1}{2\, a_{xy}}\left(A_{xy} - \frac{D_{x+1}}{D_x}\, a_{x+1:y} + \frac{D_{y+1}}{D_y}\, a_{x:y+1}\right)$$

oder

$$P_{x\overset{1}{y}} = \frac{1}{2\, a_{xy}}\left(A_{xy} + \frac{D_{x+1}}{D_x}\, a_{x+1:y} - \frac{D_{y+1}}{D_y}\, a_{x:y+1}\right).$$

Beispiel.

Ein 35jähriger Mann will seiner 33jährigen Frau ein am Ende seines Sterbejahres zahlbares Kapital von K 10.000·— sichern. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn 10, beziehungsweise 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden?

Um die Einmalprämie zu finden, wendet man die Gleichung für A^1_{xy} an, drückt darin A_{xy} durch $1 - d\, a_{xy}$ aus und erhält dann

$$A^1_{xy} = \frac{1}{2}\left\{1 - d\, a_{xy} - \frac{D_{x+1}}{D_x}\, a_{x+1:y} + \frac{D_{y+1}}{D_y}\, a_{x:y+1}\right\}$$

und nach Tafeln XII a und b

$$A^1_{35:33} = \frac{1}{2}\left\{1 - 0{\cdot}0338164 \times 15{\cdot}846 - \frac{25603}{26696} \times\right.$$

$$\left.\times\, 15\,703 + \frac{27827}{28998} \times 15{\cdot}723\right\} = 0{\cdot}246066.$$

Die Jahresprämie berechnet man am einfachsten, indem man die bereits gefundene Einmalprämie durch die Verbindungsrente dividiert.

Man erhält also für die Jahresprämie den Wert

$$P^1_{35:33} = \frac{0{\cdot}246066}{15{\cdot}846} = 0{\cdot}015529.$$

Für das versicherte Kapital von K 10·000.— beträgt die Einmalprämie K 2.706·73 und die Jahresprämie K 178·58.

§ 82. *Aufgeschobene und temporäre einseitige Überlebensversicherung.*

1. Bei der um m Jahre *aufgeschobenen einseitigen Überlebensversicherung* auf den Tod der $x$jährigen Person zugunsten der $y$jährigen kann die Einmalprämie, die wir mit ${}_{m|}A^1_{xy}$ bezeichnen, als der gegenwärtige Wert jener Einmalprämie für dieselbe Versicherung aufgefaßt werden, welche nach m Jahren, falls die Verbindung noch besteht, beginnen würde.

Nun hat aber diese Versicherung nach m Jahren für ein im $(x+m)$ten und $(y+m)$ten Lebensjahre stehendes Paar den Wert $A_{\overset{1}{x+m:y+m}}$, welcher um m Jahre abgezinst die verlangte Prämie gibt.

Es ist daher

$$_{m|}A^1_{xy} = \frac{D_{x+m:y+m}}{D_{xy}} A_{\overset{1}{x+m}:y+m}$$

oder

$$_{m|}A^1_{xy} = \frac{D_{x+m} \cdot l_{y+m}}{D_x l_y} \cdot A_{\overset{1}{x+m}:y+m} .$$

Wird diese Versicherung gegen Zahlung von Jahresprämien erworben, so erhält man für die Jahresprämie, die wir mit $_{m|}P^1_{xy}$ bezeichnen, den Wert, wenn man die Einmalprämie durch die Verbindungsrente bis zum ersten Tode dividiert.

Man hat mithin für die Jahresprämie den Wert

$$_{m|}P^1_{xy} = \frac{_{m|}A^1_{xy}}{a_{xy}}$$

oder

$$_{|m}P^1_{xy} = \frac{D_{x+m}\, l_{y+m}}{D_x\, l_y} \frac{A_{\overset{1}{x+m}:y+m}}{a_{xy}} .$$

2. Für die Einmalprämie der auf n Jahre *abgekürzten einseitigen Überlebensversicherung* erhält man ohne weiteres die Gleichung

$$_{|n}A^1_{xy} = A^1_{xy} - {}_{n|}A^1_{xy}$$

oder

$$_{n|}A^1_{xy} = A^1_{xy} - \frac{D_{x+n}\, l_{y+n}}{D_x\, l_y} A_{\overset{1}{x+n}:y+n} .$$

Beispiel.

Ein 35jähriger Mann will seiner 33jährigen Frau ein nach seinem Tode zahlbares Kapital von K 10.000·— hinterlassen, wie groß wird bei 10, beziehungsweise 15prozentigem Regiezuschlage die Einmalprämie, beziehungsweise Jahresprämie sein, wenn die Versicherungsanstalt 5 Probejahre festsetzt?

Die Einmalprämie berechnet man nach der Gleichung

$$_{m|}A^1_{xy} = \frac{D_{x+m}\, l_{y+m}}{D_x\, l_y} A_{\overset{1}{x+m}:y+m} ,$$

worin

$$A_{\overset{1}{x+m}:y+m} = \frac{1}{2}\Big\{1 - d\, a_{x+m:y+m} - \frac{D_{x+m+1}}{D_{x+m}} a_{x+m+1:y+m} + \\ + \frac{D_{y+m+1}}{D_{y+m}} a_{x+m:y+m+1}\Big\}$$

ist.

Nach Tafeln XIIa und b erhält man zunächst

$$A^1_{40:38} = \frac{1}{2}\Big\{1 - 0·0338164 \times 14·508 - \frac{20666}{21587} \times 14·355 + \\ + \frac{22540}{23526} \times 14·378\Big\} = 0·280699$$

und dann

$$_{5|}A^1_{35:33} = \frac{21587 \times 86952}{26696 \times 90239} \times 0·280699 = 0·218712.$$

Die Jahresprämie findet man nach der Gleichung

$$_{m|}P^1_{xy} = \frac{_{m|}A^1_{xy}}{a_{xy}}$$

und erhält nach denselben Tafeln

$$_{5|}P^1_{35:33} = \frac{0·218712}{15·846} = 0·013802.$$

Bei 10, beziehungsweise 15prozentigem Zuschlage beträgt für die Versicherungssumme von K 10.000·— die Einmalprämie K 2.405·83 und die Jahresprämie K 158·72.

VII. ABSCHNITT.

Berechnung der Prämienreserven für verbundene Leben.

§ 83. *Prämienreserve für Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung.*

Für die Berechnung der Prämienreserve für verbundene Leben gelten dieselben Regeln wie für das einfache Leben. Auch hier findet man, wenn man von den Versicherungen mit aufgeschobener Wirkung für die Dauer ihrer Aufschubszeit absieht, die Prämienreserve irgend einer Versicherung nach s Jahren, indem man die Einmalprämie derselben Versicherung für das um s Jahre höhere Alter bildet.

1. So ist z. B. die Prämienreserve für eine *Verbindungsrente bis zum ersten Tode*, vorausgesetzt, daß beide Personen nach s Jahren noch leben,

$$ {}_sV_{xy} = a_{x+s:y+s} $$

und die Prämienreserve für eine *Verbindungsrente bis zum zweiten Tode*, ebenfalls nur dann, wenn beide Personen nach s Jahren noch leben,

$$ {}_sV_{xy} = a_{\overline{x+s:y+s}} $$

oder

$$ {}_sV_{xy} = a_{x+s} + a_{y+s} - a_{x+s:y+s}. $$

Ist hingegen nur noch eine Person am Leben, so ist für die Verbindungsrente bis zum ersten Tode die Prämienreserve gleich Null, während für die Verbindungsrente bis zum zweiten Tode die Prämienreserve entweder den Wert

$$ {}_sV_x = a_{x+s} $$

oder

$$ {}_sV_y = a_{y+s} $$

hat, je nachdem die $x$jährige oder die $y$jährige Person noch lebt.

2. Für eine *gegenseitige Überlebensrente* ist die Prämienreserve nach s Jahren unter der Voraussetzung, daß beide Personen nach s Jahren noch am Leben sind,

$$ {}_sV_{xy} = a_{\overset{1}{x+s:y+s}} $$

oder

$$ {}_sV_{xy} = a_{x+s} + a_{y+s} - 2\,a_{x+s:y+s}. $$

Wenn nach s Jahren nur mehr eine Person lebt, so ist die Reserve entweder

$$ {}_sV_x = a_{x+s} \quad \text{oder} \quad {}_sV_y = a_{y+s}. $$

3. Für die *einseitige Überlebensrente* ist die Prämienreserve nach s Jahren im Falle, daß beide Personen noch leben,

$$ {}_sV_{xy} = a_{x+s|y+s} $$

oder

$$ {}_sV_{xy} = a_{y+s} - a_{x+s:y+s}. $$

Die Prämienreserve kann aber auch nach s Jahren den Wert Null annehmen, wenn die begünstigte Person nicht mehr lebt, oder sie kann den Wert

$$ {}_sV_y = a_{y+s} $$

haben, wenn die $x$jährige Person bereits gestorben ist.

4. Für die *gegenseitige Überlebensversicherung* hat die Prämienreserve nach s Jahren den Wert

$$ {}_sV_{xy} = A_{x+s:y+s} $$

oder

$$ {}_sV_{xy} = 1 - d\,a_{x+s:y+s}. $$

5. Die Prämienreserve für eine *gemischte gegenseitige Überlebensversicherung* hat nach Ablauf von s Jahren den Wert

$$ {}_sV_{xy} = {}_{|n-s}A_{x+s:y+s} + {}_{n-s}E_{x+s:y+s} $$

oder

$$ {}_sV_{xy} = \frac{M_{x+s:y+s} - M_{x+n:y+n} + D_{x+n:y+n}}{D_{x+s:y+s}} $$

oder auch

$$ {}_sV_{xy} = 1 - d\left(a_{x+s:y+s} - \frac{D_{x+n}\,l_{y+n}}{D_{x+s}\,l_{y+s}}\,a_{x+n:y+n}\right). $$

6. Für die *einseitige Überlebensversicherung* ist die Reserve nach s Jahren, falls beide Personen noch leben

$$ {}_sV_{xy} = A_{\overset{1}{x+s}:y+s} $$

oder

$$ {}_sV_{xy} = \frac{1}{2}\left\{1 - d\,a_{x+s:y+s} - \frac{D_{x+s+1}}{D_{x+s}}\,a_{x+s+1:y+s} + \frac{D_{y+s+1}}{D_{y+s}}\,a_{x+s:y+s+1}\right\}. $$

Ist hingegen die begünstigte Person zur Zeit der Reserveberechnung nicht mehr am Leben, so ist die Prämienreserve in diesem Falle gleich Null.

7. Bei der Berechnung der Prämienreserve für die *Todesfallversicherung auf das längste zweier Leben* hat man zu unterscheiden, ob beide Personen am Leben sind oder ob nur eine Person noch lebt; im ersten Falle ist die Prämienreserve

$${}_{s}V_{xy} = A_{\overline{x+s:y+s}}$$

oder

$${}_{s}V_{xy} = 1 - d\,(a_{x+s} + a_{y+s} - a_{x+s:y+s}).$$

Ist dagegen nur noch eine Person am Leben, so ist die Reserve entweder

$${}_{s}V_{x} = A_{x+s} = 1 - d\,a_{x+s}$$

oder

$${}_{s}V_{y} = A_{y+s} = 1 - d\,a_{y+s}.$$

Beispiele.

1. Ein 35jähriger Mann kauft gegen Zahlung einer Einmalprämie seiner 33jährigen Frau eine Witwenrente von K 2.000·—. Wie groß ist die Prämienreserve nach Ablauf von 10 Jahren, wenn Mann und Frau noch leben, beziehungsweise wenn der Mann bereits gestorben ist?

Im ersten Falle, wo also der Mann und die Frau noch leben, hat die Prämienreserve, wenn wir die Gleichung

$${}_{s}V_{xy} = a_{y+s} - a_{x+s:y+s}$$

anwenden, nach den Tafeln XII*a* und *b*, den Wert

$${}_{10}V_{35:33} = 16{\cdot}461 - 13{\cdot}077 = 3{\cdot}384.$$

Im zweiten Falle, wo der Mann bereits gestorben ist und die Frau sich bereits in dem Genuß der Rente befindet, ist die Prämienreserve nach der Gleichung

$${}_{s}V_{y} = a_{y+s}$$

und nach Tafel XII*a*

$${}_{10}V_{33} = 16{\cdot}461.$$

Für die versicherte Rente von K 2.000·— beträgt die Prämienreserve nach Ablauf von 10 Jahren K 6.768·—, beziehungsweise K 32.922·—.

2. Ein im Alter von 30, beziehungsweise von 28 Jahren stehendes Ehepaar will nach Ablauf von 25 Jahren über ein Kapital von K 10.000·— verfügen. Tritt inzwischen ein Sterbefall ein, so bekommt der überlebende Teil diesen Betrag von K 10.000·—. Wie groß ist die Prämienreserve nach 10 Jahren?

Wendet man die Gleichung

$${}_{s}V_{xy} = 1 - d\left(a_{x+s:y+s} - \frac{D_{x+n}\,l_{y+n}}{D_{x+s}\,l_{y+s}}\,a_{x+n:y+n}\right)$$

an, so erhält man nach Tafeln XII*a* und *b*

$${}_{10}V_{30:28} = 1 - 0{\cdot}0338164\left(14{\cdot}508 - \frac{10541 \times 72592}{21587 \times 86952} \times 9{\cdot}980\right) = 0{\cdot}646974.$$

Für das versicherte Kapital von K 10.000·— beträgt die Prämienreserve nach Ablauf von 10 Jahren K 6.469·74.

§ 84. *Prämienreserve für Versicherungen mit jährlicher Prämienzahlung.*

Wenn man bei der Berechnung der Prämienreserven für Versicherungen mit jährlicher Prämienzahlung die *prospektive Methode* anwendet, so ist im allgemeinen die Prämienreserve nach Ablauf von s Jahren gleich der einmaligen Prämie für das erreichte Alter von $(x+s)$ und $(y+s)$ Jahren vermindert um das Produkt aus der jährlichen Prämie und dem Werte der Verbindungsrente bis zum ersten Tode für das erreichte Alter, die so lange läuft, als die Prämienzahlung dauert.

1. So z. B. findet man die Prämienreserve für die *gegenseitige Überlebensrente* mit jährlicher Prämienzahlung nach Ablauf von s Jahren wenn beide Personen leben,

$${}_{s}V_{xy} = (a_{x+s} + a_{y+s} - 2\,a_{x+s:y+s}) - P\,.\,a_{x+s:y+s}$$

oder, wenn man darin für P den Wert $\frac{a_x + a_y}{a_{xy}} - 2$ einsetzt,

$${}_{s}V_{xy} = a_{x+s} + a_{y+s} - \frac{a_x + a_y}{a_{xy}}\,a_{x+s:y+s}.$$

Lebt nach s Jahren nur mehr eine Person, so ist die Prämienreserve entweder

$${}_{s}V_{x} = a_{x+s} \quad \text{oder} \quad {}_{s}V_{y} = a_{y+s}.$$

2. Die Prämienreserve für die *einseitige Überlebensrente* ist nach Ablauf von s Jahren unter der Voraussetzung, daß bei der Reserveberechnung beide Personen noch leben,

$${}_{s}V_{xy} = (a_{y+s} - a_{x+s:y+s}) - P\,.\,a_{x+s:y+s}$$

und wenn man darin für P den Wert $\frac{a_y}{a_{xy}} - 1$ einsetzt,

$${}_{s}V_{xy} = a_{y+s} - a_{x+s:y+s} - \left(\frac{a_y}{a_{xy}} - 1\right) a_{x+s:y+s}$$

oder

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = \mathrm{a}_{y+s} - \frac{\mathrm{a}_y}{\mathrm{a}_{xy}} \cdot \mathrm{a}_{x+s:y+s}.$$

Ist hingegen die $x$jährige Person bereits gestorben, so ist die Reserve

$${}_s\mathrm{V}_y = \mathrm{a}_{y+s} \quad \text{oder} \quad {}_s\mathrm{V}_y = 0,$$

je nachdem die $y$jährige Person bei der Reserveberechnung noch am Leben ist oder nicht.

3. Für die *gegenseitige Überlebensversicherung* ist die Prämienreserve nach Ablauf von s Jahren

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = \mathrm{A}_{x+s:y+s} - \mathrm{P}\,\mathrm{a}_{x+s:y+s}.$$

Man erhält, wenn man darin

$$\mathrm{A}_{x+s:y+s} = 1 - d\,\mathrm{a}_{x+s:y+s}$$

und

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\mathrm{a}_{xy}} - d$$

setzt, für die Prämienreserve den Wert

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = 1 - d\,\mathrm{a}_{x+s:y+s} - \left(\frac{1}{\mathrm{a}_{xy}} - d\right)\mathrm{a}_{x+s:y+s}$$

oder

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = 1 - \frac{\mathrm{a}_{x+s:y+s}}{\mathrm{a}_{xy}}.$$

4. Für die *gemischte gegenseitige Überlebensversicherung* hat die Prämienreserve nach Ablauf von s Jahren den Wert

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = \mathrm{A}_{x+s:y+s,\overline{n-s|}} - \mathrm{P}\,.\,{}_{|n-s}\mathrm{a}_{x+s:y+s}$$

oder, wenn man darin

$$\mathrm{A}_{x+s:y+s,\overline{n-s|}} = 1 - d\,{}_{|n-s}\mathrm{a}_{x+s:y+s}$$

und

$$\mathrm{P} = \frac{1}{{}_{|n}\mathrm{a}_{xy}} - d$$

setzt und dann reduziert

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = 1 - \frac{{}_{|n-s}\mathrm{a}_{x+s:y+s}}{{}_{|n}\mathrm{a}_{xy}}.$$

Nun ist aber

$${}_{|n-s}\mathrm{a}_{x+s:y+s} = \mathrm{a}_{x+s:y+s} - \frac{\mathrm{D}_{x+n}\,l_{y+n}}{\mathrm{D}_{x+s}\,l_{y+s}}\,\mathrm{a}_{x+n:y+n}$$

und

$${}_{|n}\mathrm{a}_{xy} = \mathrm{a}_{xy} - \frac{\mathrm{D}_{x+n}\,l_{y+n}}{\mathrm{D}_x\,l_y}\,\mathrm{a}_{x+n:y+n}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung für ${}_s\mathrm{V}_{xy}$ ein, so erhält man schließlich für die Prämienreserve den Wert

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = 1 - \frac{\mathrm{a}_{x+s:y+s} - \dfrac{\mathrm{D}_{x+n}\,l_{y+n}}{\mathrm{D}_{x+s}\,l_{y+s}} \cdot \mathrm{a}_{x+n:y+n}}{\mathrm{a}_{xy} - \dfrac{\mathrm{D}_{x+n}\,l_{y+n}}{\mathrm{D}_x\,l_y}\,\mathrm{a}_{x+n:y+n}}.$$

5. Für die *einseitige Überlebensversicherung* findet man die Prämienreserve nach Ablauf von s Jahren, wenn beide Personen leben, nach der Gleichung

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = \mathrm{A}_{\overset{1}{x+s}:y+s} - \mathrm{P}\,.\,\mathrm{a}_{x+s:y+s}.$$

Um eine komplizierte Endgleichung zu vermeiden, berechnet man vorerst die Werte für $\mathrm{A}_{\overset{1}{x+s}:y+s}$ und P nach den Gleichungen

$$\mathrm{A}_{\overset{1}{x+s}:y+s} = \frac{1}{2}\left\{1 - d\,\mathrm{a}_{x+s:y+s} - \frac{\mathrm{D}_{x+s+1}}{\mathrm{D}_{x+s}}\,\mathrm{a}_{x+s+1:y+s} + \frac{\mathrm{D}_{y+s+1}}{\mathrm{D}_{y+s}}\,\mathrm{a}_{x+s:y+s+1}\right\}$$

und

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\,\mathrm{a}_{xy}}\left\{1 - d\,\mathrm{a}_{xy} - \frac{\mathrm{D}_{x+1}}{\mathrm{D}_x}\,\mathrm{a}_{x+1:y} + \frac{\mathrm{D}_{y+1}}{\mathrm{D}_y}\,\mathrm{a}_{x:y+1}\right\}$$

und bestimmt erst dann den Wert für die gesuchte Prämienreserve ${}_s\mathrm{V}_{xy}$.

6. Für die *Todesfallversicherung auf das längste zweier Leben* ist bei Zahlung von Jahresprämien bis zum ersten Tode die Prämienreserve, wenn beide Personen leben,

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = \mathrm{A}_{\overline{x+s:y+s}} - \mathrm{P}\,.\,\mathrm{a}_{x+s:y+s}.$$

Setzt man darin

$$\mathrm{A}_{\overline{x+s:y+s}} = 1 - d\,(\mathrm{a}_{x+s} + \mathrm{a}_{y+s} - \mathrm{a}_{x+s:y+s})$$

und

$$\mathrm{P} = \frac{1 - d\,(\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y)}{\mathrm{a}_{xy}} + d,$$

so erhält man für die Prämienreserve den Wert

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = 1 - d\,(\mathrm{a}_{x+s} + \mathrm{a}_{y+s} - \mathrm{a}_{x+s:y+s}) - \left\{\frac{1 - d\,(\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y)}{\mathrm{a}_{xy}} + d\right\}\mathrm{a}_{x+s:y+s}$$

oder

$${}_s\mathrm{V}_{xy} = 1 - d\,(\mathrm{a}_{x+s} + \mathrm{a}_{y+s}) - \frac{1 - d\,(\mathrm{a}_x + \mathrm{a}_y)}{\mathrm{a}_{xy}}\,\mathrm{a}_{x+s:y+s}.$$

Beispiele.

1. Wie groß ist die Prämienreserve bei jährlicher Prämienzahlung für eine einseitige Überlebensrente nach Ablauf von $s=5$ Jahren, wenn $x=35$, $y=33$ ist, die versicherte Rente zugunsten der $y$jährigen Person K 2.000·— beträgt und wenn vorausgesetzt wird, daß beide Personen noch leben?

Wendet man in diesem Falle die Gleichung an

$$_{s}V_{xy} = a_{y+s} - \frac{a_y}{a_{xy}} a_{x+s:y+s},$$

so erhält man nach Tafeln XIIa und b für die Prämienreserve den Wert

$$_{5}V_{35:33} = 17{\cdot}830 - \frac{19{\cdot}075}{15{\cdot}846} \cdot 14{\cdot}508 = 0{\cdot}36571.$$

Wenn beide Personen leben, so beträgt für die versicherte Rente von K 2.000·— die Prämienreserve K 731·42.

2. Wie groß ist die Prämienreserve bei Zahlung von Jahresprämien für eine gegenseitige Überlebensversicherung auf K 10.000·— nach Ablauf von $s=5$ Jahren, wenn das Paar beim Versicherungsabschlusse 35, beziehungsweise 30 Jahre alt war?

Unter Anwendung der Gleichung

$$_{s}V_{xy} = 1 - \frac{a_{x+s:y+s}}{a_{xy}}$$

und nach der Tafel XIIb erhält man für die Prämienreserve den Wert

$$_{5}V_{35:30} = 1 - \frac{14{\cdot}861}{16{\cdot}181} = 0{\cdot}081578.$$

Für die Versicherungssumme von K 10·000·— beträgt die Prämienreserve nach 5 Jahren K 815·78.

VIII. ABSCHNITT.

Bilanz und Rechnungslegung einer Versicherungsanstalt.

§ 85. *Aktiva und Passiva. Gewinn- und Verlustkonto.*

Ein Versicherungsunternehmen hat am Schlusse einer jeden Geschäftsperiode eine *Bilanz* aufzustellen, aus der in erster Linie entnommen werden kann, ob das Unternehmen solvent ist, d. h. ob es über die zur Deckung seiner Verpflichtungen erforderlichen Mittel verfügt oder nicht. Gewöhnlich wird als Geschäftsperiode das Kalenderjahr angenommen. Bei kleineren, zumeist ehrenämtlich von Laien verwalteten Versicherungsvereinen, die Versicherungen von Kranken- und Begräbnisgeld, von Invaliditäts- und Altersrenten, von Witwen- und Waisenunterstützungen usw. zum Gegenstande haben, wird die versicherungstechnische Bilanz nach Ablauf mehrjähriger Zeiträume aufgestellt.

Zu den *Passivis* gehören in erster Linie die Prämienreserven, deren Berechnung mit Zugrundelegung der Nettoprämien unverkürzt ohne Einrechnung der Abschlußprovision stattzufinden hat. Die Prämienreserven sind *namentlich* in der Betriebsrechnung *(Gewinn- und Verlustkonto)* mindestens nach den einzelnen Hauptgattungen der Versicherungen auszuweisen, wie Todesfall- und gemischte Versicherungen, Erlebensversicherungen, Rentenversicherungen und sonstige Versicherungen.

Der Eintrittstag des einzelnen Versicherten in die Versicherung fällt in den allerseltensten Fällen mit dem Bilanztage zusammen. Daher muß die Prämienreserve nach einer nicht ganzen Anzahl von Jahren berechnet werden.

Sie ist nach § 69 gleich

$$\left[{}_{s}V_x + \frac{n}{t}({}_{s+1}V_x - {}_{s}V_x)\right] + \frac{t-n}{t} P_x.$$

Nur der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck

Beispiele.

1. Wie groß ist die Prämienreserve bei jährlicher Prämienzahlung für eine einseitige Überlebensrente nach Ablauf von $s=5$ Jahren, wenn $x=35$, $y=33$ ist, die versicherte Rente zugunsten der $y$jährigen Person K 2.000·— beträgt und wenn vorausgesetzt wird, daß beide Personen noch leben?

Wendet man in diesem Falle die Gleichung an

$$ {}_sV_{xy} = a_{y+s} - \frac{a_y}{a_{xy}} a_{x+s:y+s}, $$

so erhält man nach Tafeln XII a und b für die Prämienreserve den Wert

$$ {}_5V_{35:33} = 17{\cdot}830 - \frac{19{\cdot}075}{15{\cdot}846} \cdot 14{\cdot}508 = 0{\cdot}36571. $$

Wenn beide Personen leben, so beträgt für die versicherte Rente von K 2.000·— die Prämienreserve K 731·42.

2. Wie groß ist die Prämienreserve bei Zahlung von Jahresprämien für eine gegenseitige Überlebensversicherung auf K 10.000·— nach Ablauf von $s=5$ Jahren, wenn das Paar beim Versicherungsabschlusse 35, beziehungsweise 30 Jahre alt war?

Unter Anwendung der Gleichung

$$ {}_sV_{xy} = 1 - \frac{a_{x+s:y+s}}{a_{xy}} $$

und nach der Tafel XII b erhält man für die Prämienreserve den Wert

$$ {}_5V_{35:30} = 1 - \frac{14{\cdot}861}{16{\cdot}181} = 0{\cdot}081578. $$

Für die Versicherungssumme von K 10·000·— beträgt die Prämienreserve nach 5 Jahren K 815·78.

VIII. ABSCHNITT.

Bilanz und Rechnungslegung einer Versicherungsanstalt.

§ 85. *Aktiva und Passiva. Gewinn- und Verlustkonto.*

Ein Versicherungsunternehmen hat am Schlusse einer jeden Geschäftsperiode eine *Bilanz* aufzustellen, aus der in erster Linie entnommen werden kann, ob das Unternehmen solvent ist, d. h. ob es über die zur Deckung seiner Verpflichtungen erforderlichen Mittel verfügt oder nicht. Gewöhnlich wird als Geschäftsperiode das Kalenderjahr angenommen. Bei kleineren, zumeist ehrenämtlich von Laien verwalteten Versicherungsvereinen, die Versicherungen von Kranken- und Begräbnisgeld, von Invaliditäts- und Altersrenten, von Witwen- und Waisenunterstützungen usw. zum Gegenstande haben, wird die versicherungstechnische Bilanz nach Ablauf mehrjähriger Zeiträume aufgestellt.

Zu den *Passivis* gehören in erster Linie die Prämienreserven, deren Berechnung mit Zugrundelegung der Nettoprämien unverkürzt ohne Einrechnung der Abschlußprovision stattzufinden hat. Die Prämienreserven sind *namentlich* in der Betriebsrechnung *(Gewinn- und Verlustkonto)* mindestens nach den einzelnen Hauptgattungen der Versicherungen auszuweisen, wie Todesfall- und gemischte Versicherungen, Erlebensversicherungen, Rentenversicherungen und sonstige Versicherungen.

Der Eintrittstag des einzelnen Versicherten in die Versicherung fällt in den allerseltensten Fällen mit dem Bilanztage zusammen. Daher muß die Prämienreserve nach einer nicht ganzen Anzahl von Jahren berechnet werden.

Sie ist nach § 69 gleich

$$ \left[{}_sV_x + \frac{n}{t}({}_{s+1}V_x - {}_sV_x)\right] + \frac{t-n}{t} P_x. $$

Nur der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck

$${}_sV_x + \frac{n}{t}({}_{s+1}V_x - {}_sV_x)$$

kommt in den Passivis unter dem Namen „*Prämienreserve*", während der Summand

$$\frac{t-n}{t}P_x$$

in der Bilanz unter den Passivis als besonderer Posten „*Prämienüberträge*" geführt wird.

Die Prämienüberträge, nämlich die schon eingezahlten, jedoch erst das folgende Jahr betreffenden Prämienteile sind auch unter den Ausgaben im *Gewinn- und Verlustkonto*, nach Hauptkategorien gesondert, ersichtlich zu machen.

Unter den Passivis ist die *Schadenreserve*, d. i. der zur Bedeckung bereits fälliger Leistungen aus Versicherungsverträgen erforderliche Betrag, in ihrer vollen Höhe und im Gewinn- und Verlustkonto unter den Ausgaben nach Hauptversicheruugszweigen gesondert einzustellen.

Zu den Passivis gehören ferner *Spezialreserven*, welche außer der Prämienreserve unter verschiedenen Benennungen, wie Kapitalsreserve, Gewinstreserve, allgemeiner Reservefonds, Garantiefonds usw. zur besseren Fundierung des Versicherungsunternehmens oder zu bestimmten Zwecken zurückgelegt werden.

Den Passivis stehen die *Aktiva* in gleicher Höhe gegenüber. Dieselben bestehen aus Wertpapieren, barer Kasse, Wechseln, Darlehen usw.

Die Übersicht über die Aktiva und Passiva bildet die *eigentliche Bilanz*. Dazu kommt noch das Gewinn- und Verlustkonto, welches über die Einnahmen und Ausgaben des Geschäftsjahres Auskunft gibt. Aus der Betriebsrechnung muß entnommen werden, wie sich der Bestand des Rechnungsjahres aus dem Bestande am Schlusse des Vorjahres durch Einnahmen und Ausgaben gebildet hat.

Nach Fortlassung der Unterabteilungen ist die *Bilanz* nach folgendem Schema aufzustellen.

Aktiva.

1. Forderung an die Aktionäre für nicht eingezahltes Aktienkapital.
2. Kassastand.
3. Disponible Guthaben bei Kreditinstituten und Sparkassen.
4. Realitäten.
5. Wertpapiere zum Kurswerte am Schlusse des Rechnungsjahres.
6. Wechsel im Portefeuille.
7. Hypothekardarlehen.
8. Darlehen auf Wertpapiere und eigene Polizzen, an Genossenschaften und Kautionsdarlehen an Versicherte.

9. Pensionsfonds der Bediensteten.
10. Ausstände bei Agenturen und Filialen.
11. Vortrag der zu amortisierenden Abschlußprovisionen und Organisationskosten.
12. Wert des Inventars nach erfolgter Abschreibung.
13. Unbedeckter Abgang.

Passiva.

1. Emittiertes Aktienkapital (Gründungsfonds).
2. Gewinst-, Kapitalsreserven.
3. Kursdifferenzenfonds.
4. Prämienreserve.
5. Prämienüberträge.
6. Schadenreserve.
7. Pensionsfonds der Bediensteten.
8. Dividendenfonds der Versicherten.
9. Überschuß aus der Jahresgebarung.

Bei Fortlassung der Unterabschnitte bleiben folgende Kapitel für das

Gewinn- und Verlustkonto.

Einnahmen.

1. Übertrag der Fonds vom Vorjahre, wie Prämienreserve usw.
2. Schadenreserve vom Vorjahre.
3. Prämieneinnahme, gesondert nach den einzelnen Versicherungsarten anzuführen.
4. Erträgnis der Kapitalsanlagen.
5. Andere Einnahmen, wie Kursgewinn usw.
6. Abgang aus der Jahresgebarung.

Ausgaben.

1. Auszahlungen für fällige Versicherungen und Renten, gesondert nach den einzelnen Versicherungsarten anzuführen.
2. Auszahlungen für rückgekaufte Polizzen.
3. Dividendenauszahlung an Versicherte.
4. Regieauslagen.
5. Abschreibungen und andere Ausgaben.
6. Schadenreserve, gesondert nach den einzelnen Versicherungsarten anzuführen.
7. Stand der Fonds am Schlusse des Rechnungsjahres.
   a) Prämienreserve } gesondert nach den einzelnen Versiche-
   b) Prämienüberträge } rungsarten anzuführen.
   c) Gewinst-, Sicherheits-, Kapitalsreserven.
8. Überschuß aus der Jahresgebarung.

IX. ABSCHNITT.

Versicherungen, die von der Invalidität abhängen.

1. Einmalprämien für die von der Invalidität abhängigen Versicherungen.

§ 86. *Begriff der Invalidität. Wahrscheinlichkeiten, die aus der Sterblichkeit und aus der Invalidität hervorgehen.*

Wir haben bisher durchwegs nur Versicherungen behandelt, die vom Leben oder Sterben einer oder mehrerer versicherten Personen abhängen und dabei für die Berechnung der Prämien und Reserven Tafeln benützt, die angeben, wie viele Personen einer beobachteten Gruppe nach Erreichung eines gewissen Alters noch am Leben waren.

Der menschliche Organismus ist jedoch außer der Krankheit und anderen Zufällen, die den Tod herbeiführen, auch einer natürlichen Abnützung unterworfen, die mit zunehmendem Alter die Erwerbsnnfähigkeit oder *Invalidität (Berufs-* und *Arbeitsinvalidität)* zur Folge hat.

Nach dem österreichischen *Pensionsversicherungsgesetz* vom 31. Dezember 1906 ist „als erwerbsunfähig (invalid) derjenige anzusehen, welcher infolge eines körperlichen oder geistigen Gebrechens seinen bisherigen Berufspflichten nicht weiter zu obliegen vermag" (Berufsinvalidität), während nach der Regierungsvorlage des *Sozialversicherungsgesetzes* als „invalid derjenige anzusehen ist, welcher infolge von Alter, Krankheit oder anderen Gebrechen voraussichtlich dauernd nicht imstande ist, durch eine seinen Kräften und Fähigkeiten entsprechende Lohnarbeit, ein Drittel desjenigen zu erwerben, was körperlich und geistig gesunde Personen derselben Art mit ähnlicher Ausbildung in derselben Gegend durch Arbeit zu verdienen pflegen" (Arbeitsinvalidität).

Die Erwerbsfähigen werden im Gegensatze zu den Invaliden *Aktive* genannt.

Bezeichnet man mit ${}^{a}l_x$ die Anzahl der Aktiven im Alter von x Jahren, mit J_x die Anzahl der im Laufe des $x$ten Lebensjahres von den ${}^{a}l_x$ Aktiven hervorgegangenen Invaliden und mit S_x die Anzahl der von den ${}^{a}l_x$ Aktiven im Laufe des $x$ten Lebensjahres im aktiven Zustande Gestorbenen, so kann man ohne weiteres die Gleichung aufstellen:

$$J_x + S_x + {}^{a}l_{x+1} = {}^{a}l_x.$$

Nach Division der beiden Teile dieser Gleichung durch ${}^{a}l_x$ erhält man

$$\frac{J_x}{{}^{a}l_x} + \frac{S_x}{{}^{a}l_x} + \frac{{}^{a}l_{x+1}}{{}^{a}l_x} = 1.$$

Den Bruch $\frac{J_x}{{}^{a}l_x}$ bezeichnet man mit i_x und nennt ihn die *Invaliditätswahrscheinlichkeit*, d. i. die Wahrscheinlichkeit eines $x$jährigen Aktiven im Laufe des $x$ten Lebensjahres *invalid* zu werden.

Der Bruch $\frac{S_x}{{}^{a}l_x}$, der mit ${}^{aa}q_x$ bezeichnet wird, heißt *Aktivensterbenswahrscheinlichkeit* oder die Wahrscheinlichkeit eines $x$jährigen Aktiven im Laufe des $x$ten Lebensjahres als *Aktiver* zu sterben.

Den Bruch $\frac{{}^{a}l_{x+1}}{{}^{a}l_x}$ bezeichnet man mit ${}^{aa}p_x$ und nennt ihn die *Aktivitätswahrscheinlichkeit*, d. i. die Wahrscheinlichkeit eines $x$jährigen Aktiven nach einem Jahre als *Aktiver* noch zu leben. Man erhält mithin zwischen diesen Wahrscheinlichkeiten die Beziehung

$${}^{aa}p_x + {}^{aa}q_x + i_x = 1.$$

Die Summe aus der Aktiven-Sterbenswahrscheinlichkeit und der Invaliditätswahrscheinlichkeit, die wir mit α_x bezeichnen, nennt man die *Ausscheidewahrscheinlichkeit*, d. i. die Wahrscheinlichkeit für einen $x$jährigen Aktiven vor Erreichung des $(x+1)$ten Lebensjahres aus der Gruppe der ${}^{a}l_x$ Aktiven, sei es durch Tod oder Invalidität, auszuscheiden.

Es ist also

$${}^{aa}q_x + i_x = \alpha_x$$

und

$${}^{aa}p_x + \alpha_x = 1.$$

Ist die Ausscheide- und mithin die Lebenswahrscheinlichkeit für jedes Alter bekannt, so kann man mit deren Hilfe eine *Abfallsordnung der Aktiven* nach folgendem Schema aufstellen. Es ist, wenn man mit einer willkürlich gewählten runden Zahl der Aktiven z. B. mit ${}^{a}l_x = 100.000$ beginnt:

$$
\begin{aligned}
{}^{a}l_{x+1} &= {}^{a}l_x\, {}^{aa}p_x,\\
{}^{a}l_{x+2} &= {}^{a}l_{x+1} \cdot {}^{aa}p_{x+1} = {}^{a}l_x\, {}^{aa}p_{x+1}\, {}^{aa}p_x,\\
{}^{a}l_{x+3} &= {}^{a}l_{x+2} \cdot {}^{aa}p_{x+2} = {}^{a}l_x\, {}^{aa}p_{x+2}\, {}^{aa}p_{x+1}\, {}^{aa}p_x,\\
&\vdots\\
{}^{a}l_\omega &= {}^{a}l_{\omega-1}\, {}^{aa}p_{\omega-1} = {}^{a}l_x\, {}^{aa}p_{\omega-1}\, {}^{aa}p_{\omega-2} \ldots {}^{aa}p_x .
\end{aligned}
$$

Ist die *Sterbenswahrscheinlichkeit* ${}^{ii}q_x$ *eines xjährigen Invaliden*, d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß ein $x$jähriger Invalide innerhalb des $x$ten Lebensjahres stirbt, bekannt, so ist auch hiemit die Wahrscheinlichkeit für einen $x$jährigen Invaliden nach einem Jahre noch zu leben, d. i. die Lebenswahrscheinlichkeit ${}^{ii}p_x$ eines $x$jährigen Invaliden gegeben.

Es ist nämlich

$$ {}^{ii}p_x = 1 - {}^{ii}q_x . $$

Wenn man die Invaliden-Sterbenswahrscheinlichkeit für jedes Alter kennt, wodurch auch die Lebenswahrscheinlichkeit der Invaliden gegeben ist, so erhält man, falls man mit einer willkürlich angenommenen runden Zahl der Invaliden, z. B. mit ${}^{i}l_x = 100.000$ beginnt, worin x das niedrigste Alter bedeutet, in welchem bereits Invalide vorhanden sind, eine der vorhergehenden ähnliche *Abfallsordnung der Invaliden.*

Es ist also:

$$
\begin{aligned}
{}^{i}l_{x+1} &= {}^{i}l_x (1 - {}^{ii}q_x) = {}^{i}l_x\, {}^{ii}p_x,\\
{}^{i}l_{x+2} &= {}^{i}l_{x+1} (1 - {}^{ii}q_{x+1}) = {}^{i}l_{x+1}\, {}^{ii}p_{x+1} = {}^{i}l_x\, {}^{ii}p_{x+1}\, {}^{ii}p_x,\\
{}^{i}l_{x+3} &= {}^{i}l_{x+2} (1 - {}^{ii}q_{x+2}) = {}^{i}l_{x+2}\, {}^{ii}p_{x+2} = {}^{i}l_x\, {}^{ii}p_{x+2}\, {}^{ii}p_{x+1}\, {}^{ii}p_x,\\
&\vdots\\
{}^{i}l_\omega &= {}^{i}l_{\omega-1} (1 - {}^{ii}q_{\omega-1}) = {}^{i}l_{\omega-1}\, {}^{ii}p_{\omega-1} = {}^{i}l_x\, {}^{ii}p_{\omega-1}\, {}^{ii}p_{\omega-2} \ldots\ldots {}^{ii}p_x .
\end{aligned}
$$

Als statistische Grundlagen für die Invalidenversicherungen dienen fast allgemein die Arbeiten von *Zimmermann* über die Statistik der Sterblichkeitsverhältnisse und Dienstunfähigkeit für das Nichtfahrpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen, deren Daten auch dem österreichischen Pensionsversicherungsgesetz von 1896 zugrunde gelegt wurden und die aus den im Anhange befindlichen Tafeln XIV und XV entnommen werden können.

§ 87. *Aktivitäts- und Invalidenrenten.*

1. Erhält ein Aktiver eine jährlich im voraus zahlbare Kapitalseinheit, solange er aktiv bleibt, so heißt eine solche Rente eine vorschüssige *Aktivitätsrente*, deren gegenwärtigen Wert wir für einen $x$jährigen Aktiven mit ${}^{a}\mathrm{a}_x$ bezeichnen.

Man bekommt dafür ähnlich wie für die Leibrente den Wert

$$ {}^{a}\mathrm{a}_x = 1 + \frac{{}^{a}D_{x+1}}{{}^{a}D_x} + \frac{{}^{a}D_{x+2}}{{}^{a}D_x} + \cdots\cdots + \frac{{}^{a}D_\omega}{{}^{a}D_x}, $$

worin ${}^{a}D_x$ das Produkt ${}^{a}l_x v^x$ bezeichnet und die *„diskontierte Zahl der Aktiven"* genannt wird.

Bringen wir die rechte Seite dieser Gleichung auf den gemeinsamen Nenner ${}^{a}D_x$ und setzen *„die Summe der diskontierten Zahlen der Aktiven"*

$$ {}^{a}D_x + {}^{a}D_{x+1} + \cdots\cdots + {}^{a}D_\omega = {}^{a}N_x, $$

so erhält man

$$ {}^{a}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{a}N_x}{{}^{a}D_x} . $$

Ähnlich wie für die aufgeschobene und kurze Leibrente erhält man auch für die *aufgeschobene Aktivitätsrente* den Wert

$$ {}_{m|}^{\;a}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{a}N_{x+m}}{{}^{a}D_x} $$

und für die *kurze Aktivitätsrente* den Wert

$$ {}_{|n}^{\;a}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{a}N_x - {}^{a}N_{x+n}}{{}^{a}D_x} . $$

Soll die Rente nicht ganzjährig, sondern $n$teljährig, d. i. in n gleichen Raten jedesmal mit dem Betrage $\frac{1}{n}$, gezahlt werden, so ist von dem Werte ${}^{a}\mathrm{a}_x$ noch eine Größe in Abzug zu bringen, die in erster Annäherung nur von n, in weiterer auch vom Prozentsatze p abhängig ist. Wie bei den unterjährigen Leibrenten ist der einfachste Näherungswert dieses Abzuges

$$ \frac{n-1}{2n}; $$

genauer jedoch ist der Näherungswert

$$ \frac{n-1}{2n} + \frac{n^2-1}{6n^2}\, i - \frac{n^2-1}{12n^2}\, i^2, $$

worin $i = \frac{p}{100}$ bedeutet.

Wählt man den letzteren Näherungswert, so erhält man für eine in *monatlichen* Raten im voraus zahlbare Rente vom Jahresbetrage einer Kapitalseinheit bei 4prozentiger Verzinsung den Wert

$$ {}^{a}\mathrm{a}_x^{(12)} = {}^{a}\mathrm{a}_x - 0{\cdot}4648 . $$

Drückt man darin ${}^{a}\mathrm{a}_x$ durch die Summe der diskontierten Zahlen der Aktiven aus, so bekommt man

$${}^{a}\mathrm{a}_x^{(12)} = \frac{{}^{a}\mathrm{N}_x - 0{\cdot}4648\,{}^{a}\mathrm{D}_x}{{}^{a}\mathrm{D}_x}$$

oder, wenn man

$${}^{a}\mathrm{N}_x - 0{\cdot}4648\,{}^{a}\mathrm{D}_x = {}^{a}\mathrm{N}_x^{(12)}$$

setzt, für die in monatlichen Raten zahlbare Rente den Wert

$${}^{a}\mathrm{a}_x^{(12)} = \frac{{}^{a}\mathrm{N}_x^{(12)}}{{}^{a}\mathrm{D}_x}.$$

So ist beispielsweise für einen 40jährigen Aktiven die in monatlichen Raten zahlbare vorschüssige Aktivitätsrente von einer Einheit nach Tafel XIV

$${}^{a}\mathrm{a}_{40}^{(12)} = \frac{225\,231}{17\,386} = 12{\cdot}9548.$$

Der Wert einer solchen Versicherung auf monatlich K 100·— beträgt mithin K 15.545·76.

2. Entsprechend dem vorhergehenden findet man den gegenwärtigen Wert einer *vorschüssigen Invalidenrente*, d. i. einer jährlich im voraus bis zu seinem Tode zahlbaren Rente vom Jahresbetrage einer Einheit an einen $x$jährigen Invaliden, wenn wir dieselbe mit ${}^{i}\mathrm{a}_x$ bezeichnen,

$${}^{i}\mathrm{a}_x = 1 + \frac{{}^{i}\mathrm{D}_{x+1}}{{}^{i}\mathrm{D}_x} + \frac{{}^{i}\mathrm{D}_{x+2}}{{}^{i}\mathrm{D}_x} + \cdots\cdots + \frac{{}^{i}\mathrm{D}_\omega}{{}^{i}\mathrm{D}_x},$$

worin ${}^{i}\mathrm{D}_x$ die *„diskontierte Zahl der Invaliden"* bedeutet.

Bringt man die rechte Seite der Gleichung auf gleichen Nenner ${}^{i}\mathrm{D}_x$ und setzt *„die Summe der diskontierten Zahlen der Invaliden"*

$${}^{i}\mathrm{D}_x + {}^{i}\mathrm{D}_{x+1} + \cdots\cdots + {}^{i}\mathrm{D}_\omega = {}^{i}\mathrm{N}_x,$$

so ist

$${}^{i}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{i}\mathrm{N}_x}{{}^{i}\mathrm{D}_x},$$

deren Werte für jedes Alter aus der Tafel XIV entnommen werden können.

§ 88. *Werte von Anwartschaften eines Aktiven auf eine Invalidenrente (Pensionsversicherung).*

1. Im zweiten Absatz des vorhergehenden Paragraphen haben wir den Barwert einer Invalidenrente ermittelt, d. i. jenen Betrag, den ein Invalider zahlen muß, um alljährlich, so lange er invalid ist, bis zu seinem Tode eine Einheit zu erhalten; nun wollen wir den Wert der Anwartschaft eines Aktiven auf eine Invalidenrente, d. i. jenen Betrag bestimmen, den ein $x$jähriger *Aktiver* zahlen muß, um nach Eintritt seiner Invalidität am Anfange eines jeden Jahres bis zu seinem Tode eine Rente im Betrage einer Einheit zu erhalten.

Von den ${}^{a}l_x$ $x$jährigen aktiven Personen werden im Laufe des ersten, zweiten, dritten, usw. .... Jahres ${}^{a}l_x\,i_x$, ${}^{a}l_{x+1}\,i_{x+1}$, ${}^{a}l_{x+2}\,i_{x+2}$, usw. Personen invalid. Doch treten diese invalid gewordenen Personen nicht alle in den Genuß der Rente, da ein Teil derselben im Laufe des Invalidenjahres vor Beginn des Rentenbezuges stirbt.

Wenn sich nun das Invalidwerden über das ganze Jahr gleichmäßig verteilt, so kann man annähernd annehmen, daß alle innerhalb eines Jahres invalid gewordenen Personen in der Mitte des Jahres arbeitsunfähig werden und daher bis zum Beginne des Rentenbezuges noch ein halbes Jahr dem Absterben ausgesetzt sind. Wenn wir weiters annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit innerhalb eines halben Jahres zu sterben annähernd halb so groß ist, als die Wahrscheinlichkeit innerhalb eines ganzen Jahres zu sterben, so ist die Zahl der am Ende des ersten, zweiten, dritten, usw. ...... Jahres noch lebenden Invaliden:

$${}^{ai}l_x = {}^{a}l_x\,i_x - {}^{a}l_x\,i_x\,\frac{q_x^{ii}}{2} = {}^{a}l_x\,i_x\left(1 - \frac{{}^{ii}q_x}{2}\right),$$

$${}^{ai}l_{x+1} = {}^{a}l_{x+1}\,i_{x+1} - {}^{a}l_{x+1}\,i_{x+1}\,\frac{{}^{ii}q_{x+1}}{2} = {}^{a}l_{x+1}\,i_{x+1}\left(1 - \frac{{}^{ii}q_{x+1}}{2}\right),$$

$${}^{ai}l_{x+2} = {}^{a}l_{x+2}\,i_{x+2} - {}^{a}l_{x+2}\,i_{x+2}\,\frac{{}^{ii}q_{x+2}}{2} = {}^{a}l_{x+2}\,i_{x+2}\left(1 - \frac{{}^{ii}q_{x+2}}{2}\right),$$

An jeden dieser ${}^{ai}l_x$ Personen, d. i. an jeden der am Schlusse des ersten Jahres noch lebenden Invaliden ist vom Beginne des zweiten Jahres angefangen, jährlich, so lange er lebt, der Betrag von einer Einheit zu bezahlen, welcher, auf den Eintritt der Invalidität bezogen, den Wert einer Invalidenrente für eine $(x+1)$jährige Person, d. i. den Wert von ${}^{i}\mathrm{a}_{x+1}$ hat. Der Zeitwert aller Zahlungen an die ${}^{ai}l_x$ Personen ist mithin gleich

$${}^{ai}l_x\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+1} = {}^{a}l_x\,i_x\left(1 - \frac{{}^{ii}q_x}{2}\right){}^{i}\mathrm{a}_{x+1}.$$

Ebenso ist der Zeitwert der an die ${}^{ai}l_{x+1}$ am Schlusse des zweiten Jahres noch lebenden Invaliden zu zahlenden Renten vom Jahresbetrage einer Einheit, auf den Eintritt der Invalidität bezogen, gleich

$${}^{ai}l_{x+1}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+2} = {}^{a}l_{x+1}\,i_{x+1}\left(1 - \frac{{}^{ii}q_{x+1}}{2}\right){}^{i}\mathrm{a}_{x+2} \quad \text{usw.}$$

Um den gegenwärtigen Wert dieser Rentenzahlungen zu ermitteln, hat man die im ersten, zweiten, dritten usw. ...... Jahre entstehenden Belastungswerte um ein, zwei, drei usw. Jahre abzuzinsen, so daß sich

der gegenwärtige Wert aller künftigen Zahlungen an die aus den ${}^{a}l_x$ $x$jährigen Aktiven nach und nach hervorgehenden Invaliden als Summe von

$$ {}^{ai}l_x\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+1}\,v + {}^{ai}l_{x+1}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+2}\,v^2 + {}^{ai}l_{x+2}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+3}\,v^3 + \cdots\cdots $$

ergibt. Dividiert man diese Summe, die sich bis zum höchsten Alter, das in der Aktivitätsordnung vorkommt, erstreckt, durch ${}^{a}l_x$, so erhält man den *Wert der Anwartschaft* eines $x$jährigen Aktiven auf eine *konstante Invalidenrente.*

Bezeichnen wir diesen Wert mit ${}^{ai}\mathrm{a}_x$, so ist

$$ {}^{ai}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{ai}l_x\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+1}\,v + {}^{ai}l_{x+1}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+2}\,v^2 + {}^{ai}l_{x+2}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+3}\,v^3 + \cdots\cdots}{{}^{a}l_x} $$

und nach erfolgter Multiplikation des Zählers und Nenners mit v^x

$$ {}^{ai}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{ai}l_x\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+1}\,v^{x+1} + {}^{ai}l_{x+1}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+2}\,v^{x+2} + {}^{ai}l_{x+2}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+3}\,v^{x+3} + \cdots\cdots}{{}^{a}l_x\,v^x}. $$

Setzt man

$$ {}^{ai}l_x\,{}^{i}\mathrm{a}_{x+1}\,v^{x+1} = {}^{a}l_x\,i_x\left(1 - \frac{{}^{i}q_x}{2}\right)\mathrm{a}_{x+1}\,v^{x+1} = {}^{ai}\mathrm{D}_x, $$

so erhält man, da ${}^{a}l_x\,v^x = {}^{a}\mathrm{D}_x$ ist,

$$ {}^{ai}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{ai}\mathrm{D}_x + {}^{ai}\mathrm{D}_{x+1} + {}^{ai}\mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots}{{}^{a}\mathrm{D}_x} $$

oder, wenn man *die Summe*

$$ {}^{ai}\mathrm{D}_x + {}^{ai}\mathrm{D}_{x+1} + {}^{ai}\mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots $$

durch ${}^{ai}\mathbb{N}_x$ bezeichnet,

$$ {}^{ai}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{ai}\mathbb{N}_x}{{}^{a}\mathrm{D}_x}. $$

2. *Ist eine mjährige Karenz vereinbart,* d. h. tritt die Berechtigung zum Bezuge einer Invalidenrente (Pension) erst nach $m$jähriger Versicherungsdauer ein, so erhält man ähnlich wie bei der um m Jahre aufgeschobenen Leibrente

$$ {}^{ai}_{m|}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m}}{{}^{a}\mathrm{D}_x}. $$

3. Wenn der Anspruch auf die zu versichernde Rente keinen konstanten Betrag bildet, sondern sich mit jedem Jahre der Aktivität vermehrt, so heißt eine solche Versicherung eine *steigende Invalidenrenten-Versicherung. (Steigende Pensionsversicherung.)* Soll den aus den ${}^{a}l_x$ $x$jährigen Aktiven im ersten Jahre hervorgehenden Invaliden eine lebenslängliche Invalidenrente von dem Jahresbetrage einer Einheit,

den im zweiten Jahre entstehenden Invaliden eine lebenslängliche Invalidenrente vom Jahresbetrage zweier Einheiten, den im dritten Jahre hervorgehenden Invaliden eine lebenslängliche Invalidenrente von dem Jahresbetrage dreier Einheiten usw. gezahlt werden, so erhält man für die Einmalprämie $(\mathrm{I}\,{}^{ai}\mathrm{a})_x$ einer solchen Versicherung den Wert

$$ (\mathrm{I}\,{}^{ai}\mathrm{a})_x = \frac{{}^{ai}\mathrm{D}_x + 2\,{}^{ai}\mathrm{D}_{x+1} + 3\,{}^{ai}\mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots}{{}^{a}\mathrm{D}_x} $$

oder, wenn man ähnlich wie bei der veränderlichen Leibrente

$$ {}^{ai}\mathrm{D}_x + 2\,{}^{ai}\mathrm{D}_{x+1} + 3\,{}^{ai}\mathrm{D}_{x+2} + \cdots\cdots = \Sigma\,{}^{ai}\mathbb{N}_x = {}^{ai}\mathbb{S}_x $$

setzt,

$$ (\mathrm{I}\,{}^{ai}\mathrm{a})_x = \frac{{}^{ai}\mathbb{S}_x}{{}^{a}\mathrm{D}_x}. $$

4. Steigt die Invalidenrente nur bis zum Höchstbetrage von n Einheiten und bleibt dann konstant, so hat die Einmalprämie dieser *steigenden Invalidenrente,* wenn man dieselbe mit $(\mathrm{I}_{\overline{n}|}\,{}^{ai}\mathrm{a})_x$ bezeichnet, analog der steigenden Leibrente, den Wert

$$ (\mathrm{I}_{\overline{n}|}\,{}^{ai}\mathrm{a})_x = \frac{{}^{ai}\mathbb{S}_x - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+n}}{{}^{a}\mathrm{D}_x}. $$

5. Wird außerdem noch eine *mjährige Wartezeit* (Karenz) derart festgesetzt, daß erst die im $(m+1)$ten Versicherungsjahre entstehenden Invaliden einen Anspruch auf eine lebenslängliche Invalidenrente im jährlichen Betrage von einer Einheit, die im $(m+2)$ten Jahre invalid gewordenen Personen einen Anspruch auf eine lebenslängliche Invalidenrente in jährlichem Betrage von zwei Einheiten, usw. ...... die in $(m+n)$ten und jedem folgenden Jahre entstehenden Invaliden einen Anspruch auf eine lebenslängliche Invalidenrente im jährlichen Betrage von n Einheiten haben, so ist die Einmalprämie ${}_{m+1|}(\mathrm{I}_{\overline{n}|}\,{}^{ai}\mathrm{a})_x$ dieser um m Jahre *aufgeschobenen steigenden Invalidenrente*

$$ {}_{m+1|}(\mathrm{I}_{\overline{n}|}\,{}^{ai}\mathrm{a})_x = \frac{{}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1}}{{}^{a}\mathrm{D}_x}. $$

6. Oft wird auch die Vereinbarung getroffen, daß die Pension nach einer bestimmten Anzahl von Dienstjahren (Teilnahmsjahren) auch dann gewährt wird, wenn der Versicherte, *ohne dienstunfähig zu sein,* diese Anzahl von Dienstjahren zurückgelegt hat. Der Barwert dieses Anspruches ist gleich dem Barwerte einer um die Zahl der Dienstjahre aufgeschobenen Aktivitätsrente. Beträgt die Anzahl der Dienstjahre $(m+n)$, so hat ein solcher Anspruch den Barwert

$$ {}_{m+n|}{}^{a}\mathrm{a}_x = \frac{{}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}}{{}^{a}\mathrm{D}_x}, $$

welcher noch zu dem Barwerte des Anspruches auf die Invalidenrente zu addieren wäre.

Soll z. B. die Invalidenpension nach einer $m$jährigen Karenzzeit α Prozent der Gehaltseinheit betragen, jedes weitere Jahr durch n Jahr um β Prozent steigen und nach $(m+n)$ Jahren, nachdem sie den Höchstbetrag, d. i. $(\alpha + n\beta)$ Prozent der Gehaltseinheit erreicht hat, dieses Maximum *unbedingt*, auch ohne Nachweis der eingetretenen Dienstunfähigkeit (Erwerbsunfähigkeit), als *Altersrente* ausbezahlt werden, so ist der Barwert dieser Versicherungskombination

$$0{\cdot}01\,\alpha\,\frac{{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m}}{{}^{a}\mathrm{D}_x} + 0{\cdot}01\,\beta\,\frac{{}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1}}{{}^{a}\mathrm{D}_x} + 0{\cdot}01\,(\alpha+n\beta)\,\frac{{}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}}{{}^{a}\mathrm{D}_x}$$

oder

$$0{\cdot}01\,\frac{\alpha\,{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m} + \beta\,({}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1}) + (\alpha+n\beta)\,{}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}}{{}^{a}\mathrm{D}_x}.$$

Wird jedoch eine monatliche Zahlung der Invaliden-, beziehungsweise Altersrente vereinbart, so hat man in obigem Ausdrucke an Stelle von ${}^{i}\mathrm{a}_x$ den unterjährigen Rentenwert ${}^{i}\mathrm{a}_x^{(12)} = {}^{i}\mathrm{a}_x - 0{\cdot}4648$ und für ${}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}$ den Wert

$${}^{a}\mathbb{N}^{(12)}_{x+m+n} = {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n} - 0{\cdot}4648\,{}^{a}\mathrm{D}_x$$

zu setzen.

Beispiel.

Nach den Statuten eines Pensionsvereines wird die Pension eines Beamten nach 10jähriger Dienstzeit mit 40 Prozent des Gehaltes bemessen und nimmt mit jedem weiteren Dienstjahre um 2·4 Prozent derart zu, daß nach 35 Dienstjahren das volle Gehalt als Ruhegenuß (Altersrente) auch ohne Nachweis der eingetretenen Dienstunfähigkeit gewährt wird. Wie groß ist der Barwert des Pensionsanspruches eines 30jährigen Beamten, wenn das Jahresgehalt vom Dienstantritte bis zu seiner Pensionierung K 6.000·— betragen würde?

Setzt man in dem Ausdrucke

$$0{\cdot}01\,\frac{\alpha\,{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m} + \beta\,({}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1}) + (\alpha+n\beta)\,{}^{a}\mathbb{N}^{(12)}_{x+m+n}}{{}^{a}\mathrm{D}_x}$$

$x = 30$, $m = 10$, $\alpha = 40$, $\beta = 2{\cdot}4$ und $n = 25$, so erhält man für diesen Pensionsanspruch nach Tafel XIV den Barwert

$$0{\cdot}01\,\frac{40 \times 42110{\cdot}5 + 2{\cdot}4\,(704140{\cdot}6 - 27947{\cdot}4) + 861600}{28393} = 1{\cdot}468279.$$

Der Barwert des Pensionsanspruches beträgt für die Einheit 1·468279 und für das Gehalt von K 6·000.—: K 8.809·67.

Nach 25 Dienstjahren wird der Barwert des Pensionsanspruches des dann 55jährigen Beamten nach derselben Tafel für die Einheit

$$0{\cdot}01\,\frac{(\alpha + 15\beta)\,{}^{ai}\mathbb{N}_{55} + \beta\,({}^{ai}\mathbb{S}_{56} - {}^{ai}\mathbb{S}_{66}) + 100\,{}^{a}\mathbb{N}^{(12)}_{65}}{{}^{a}\mathrm{D}_{55}} = 4{\cdot}753247$$

und für das volle Gehalt K 28.519·48 betragen.

§ 89. *Werte von Anwartschaften eines Aktiven auf eine Witwenrente (Witwenpension).*

Wir wollen uns hier mit Versicherungen von Witwenrenten (Witwenpensionen) nur insoweit beschäftigen, als sie von den Aktiven eingegangen werden und dieselben derart durchführen, daß alle Mitglieder eines Pensionsvereines, mögen sie zur Zeit ihres Dienstantrittes verheiratet sein oder nicht, Anspruch auf die Versorgung der Frau haben, die sie während ihrer Aktivität geehelicht haben und bei ihrem Tode möglicherweise hinterlassen. Unberücksichtigt bleiben die im Invalidenstande geehelichten Frauen.

Aus dem Altersaufbau der versicherten Aktiven und aus ihrem Familienstandsverhältnisse, aus dem man insbesondere entnehmen kann, in welchem Alter und wie viele von ihnen mit nach ihrem Alter geordneten Frauen verheiratet sind, läßt sich der Durchschnittswert der Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins eines Aktiven berechnen.

Denn angenommen, es sind ${}^{a}\mathrm{L}_x$ Aktive im Alter von x Jahren, von denen ${}^{a}\mathrm{L}_{xy_1}$ Aktive mit $y_1$jährigen, ${}^{a}\mathrm{L}_{xy_2}$ mit $y_2$jährigen usw. ..... und ${}^{a}\mathrm{L}_{xy_\nu}$ mit $y_\nu$jährigen Frauen verheiratet sind, so hat überhaupt die *Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins* eines $x$jährigen Aktiven, die wir mit ${}^{a}h_x$ bezeichnen, den Wert

$${}^{a}h_x = \frac{{}^{a}\mathrm{L}_{xy_1} + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_2} + \cdots\cdots + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_\nu}}{{}^{a}\mathrm{L}_x}$$

oder, wenn man die Summe

$${}^{a}\mathrm{L}_{xy_1} + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_2} + \cdots\cdots + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_\nu} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} {}^{a}\mathrm{L}_{xy_\mu}$$

setzt,

$${}^{a}h_x = \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=\nu} {}^{a}\mathrm{L}_{xy_\mu}}{{}^{a}\mathrm{L}_x},$$

während z. B.

$${}^{a}h_{xy_1} = \frac{{}^{a}\mathrm{L}_{xy_1}}{{}^{a}\mathrm{L}_x} \qquad \text{oder} \qquad {}^{a}h_{xy_2} = \frac{{}^{a}\mathrm{L}_{xy_2}}{{}^{a}\mathrm{L}_x} \quad \text{usw. ......}$$

die Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins eines $x$jährigen Aktiven mit einer y_1, beziehungsweise $y_2$jährigen Frau usw. ...... bedeutet.

1. Um den Barwert der Anwartschaft auf eine Witwenrente nach einem $x$jährigen Aktiven bestimmen zu können, müssen wir vor allem den *durchschnittlichen Barwert der Witwenrente nach einem im Alter von x Jahren verstorbenen* und außerdem noch den *durchschnittlichen Barwert der Witwenrente nach einem im Alter von x Jahren invalid gewordenen Aktiven* berechnen.

Im ersten Falle ist der durchschnittliche Barwert einer Witwenrente, den wir mit ${}^{a}\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)}$ bezeichnen, nach einem im $x$ten Lebensjahre gestorbenen Aktiven auf Grund der Familienstandstabelle und einer Absterbeordnung für Frauen, wenn wir eine monatliche Pränumerandoauszahlung der Rente voraussetzen,

$${}^{a}\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)} = \frac{{}^{a}\mathrm{L}_{xy_1}\,\mathrm{a}_{y_1}^{(12)} + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_2}\,\mathrm{a}_{y_2}^{(12)} + \cdots\cdots + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_\nu}\,\mathrm{a}_{y_\nu}^{(12)}}{{}^{a}\mathrm{L}_x}$$

oder

$${}^{a}\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)} = \frac{\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} {}^{a}\mathrm{L}_{xy_\mu}\,\mathrm{a}_{y_\mu}^{(12)}}{{}^{a}\mathrm{L}_x}.$$

Damit man den gegenwärtigen Durchschnittswert der Witwenrente ${}^{i}\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)}$ nach einem im $x$ten Lebensjahre invalid gewordenen Aktiven berechnen kann, muß man vorerst den Barwert der Anwartschaft eines mit einer $y$jährigen Frau verheirateten $x$jährigen Invaliden ermitteln.

Von den ${}^{i}l_x$ $x$jährigen Invaliden sterben nach einem, zwei, drei, usw. ...... Jahren

$${}^{i}l_x - {}^{i}l_{x+1} = {}^{i}d_x,\quad {}^{i}l_{x+1} - {}^{i}l_{x+2} = {}^{i}d_{x+1},\quad {}^{i}l_{x+2} - {}^{i}l_{x+3} = {}^{i}\mathrm{d}_{x+2},\ \text{usw.} \ldots.$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine $y$jährige Frau nach ein, zwei, drei, usw. ...... Jahren noch am Leben zu sein, ist gleich

$$\frac{l_{y+1}}{l_y},\quad \frac{l_{y+2}}{l_y},\quad \frac{l_{y+3}}{l_y},\quad \text{usw.} \ldots\ldots$$

und die Wahrscheinlichkeit für eine $y$jährige Frau nach ein, zwei, drei, usw. ...... Jahren Witwe zu werden, gleich

$$\frac{{}^{i}d_x}{{}^{i}l_x}\cdot\frac{l_{y+1}}{l_y},\quad \frac{{}^{i}d_{x+1}}{{}^{i}l_x}\cdot\frac{l_{y+2}}{l_y},\quad \frac{{}^{i}d_{x+2}}{{}^{i}l_x}\cdot\frac{l_{y+3}}{l_y},\quad \text{usw.} \ldots\ldots$$

Nehmen wir an, daß der Tod der Invaliden durchschnittlich in der Mitte des Jahres eintritt und jeder Witwe eine vorschüssige Rente mit dem monatlichen Betrage von $\frac{1}{12}$ einer Einheit gewährt wird, so würden folgende Belastungen durchschnittlich in der Mitte des Todesjahres der invaliden Ehemänner entstehen:

$$\frac{{}^{i}d_x}{{}^{i}l_x}\frac{l_{y+1}}{l_y}\,\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^{(12)},\quad \frac{{}^{i}d_{x+1}}{{}^{i}l_x}\frac{l_{y+2}}{l_y}\,\mathrm{a}_{y+1+\frac{1}{2}}^{(12)},\quad \frac{{}^{i}d_{x+2}}{{}^{i}l_x}\frac{l_{y+3}}{l_y}\,\mathrm{a}_{y+2+\frac{1}{2}}^{(12)},\quad \text{usw.}$$

deren gesamter Wert, wenn wir denselben mit ${}^{i}\mathrm{a}_{x|y}^{(12)}$ bezeichnen, auf den Beginn der Versicherung bezogen,

$${}^{i}\mathrm{a}_{x|y}^{(12)} = \frac{v^{\frac{1}{2}}\,{}^{i}d_x\,l_{y+1}\,\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^{(12)} + v^{\frac{3}{2}}\,{}^{i}d_{x+1}\,l_{y+2}\,\mathrm{a}_{y+\frac{3}{2}}^{(12)} + v^{\frac{5}{2}}\,{}^{i}d_{x+2}\,l_{y+3}\,\mathrm{a}_{y+\frac{5}{2}}^{(12)} + \cdots\cdot}{{}^{i}l_x\,l_y}$$

ist. Für $\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^{(12)}$ können wir im allgemeinen das arithmetische Mittel zwischen den Renten für das $x$jährige und $(x+1)$jährige Alter nehmen, so daß also

$$\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^{(12)} = \frac{\mathrm{a}_y^{(12)} + \mathrm{a}_{y+1}^{(12)}}{2}$$

gesetzt werden kann.

Multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung für ${}^{i}\mathrm{a}_{x|y}^{(12)}$ mit v^x, so erhält man

$${}^{i}\mathrm{a}_{x|y}^{(12)} = \frac{\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\Big\{v^{x+1}\,{}^{i}d_x\,l_{y+1}\,\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^{(12)} + v^{x+2}\,{}^{i}d_{x+1}\,l_{y+2}\,\mathrm{a}_{y+\frac{3}{2}}^{(12)} +}{{}^{i}\mathrm{D}_x\,l_y}$$

$$\frac{+\,v^{x+3}\,{}^{i}d_{x+2}\,l_{y+3}\,\mathrm{a}_{y+\frac{5}{2}}^{(12)} + \cdots\cdots\Big\}}{{}^{i}\mathrm{D}_x\,l_y}$$

oder, wenn man

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\,v^{x+1}\,{}^{i}d_x\,l_{y+1}\,\mathrm{a}_{y+\frac{1}{2}}^{(12)} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\,{}^{i}\mathrm{C}_x\,l_{y+1}\,\frac{\mathrm{a}_y^{(12)} + \mathrm{a}_{y+1}^{(12)}}{2} = {}^{i}\mathrm{D}_{xy}$$

und

$${}^{i}\mathrm{D}_{xy} + {}^{i}\mathrm{D}_{x+1:y+1} + {}^{i}\mathrm{D}_{x+2:y+2} + \cdots\cdots = {}^{i}\mathbb{N}_{xy}$$

setzt,

$${}^{i}\mathrm{a}_{x|y}^{(12)} = \frac{{}^{i}\mathbb{N}_{xy}}{{}^{i}\mathrm{D}_x l_y}.$$

Der durchschnittliche Barwert der Witwenrente nach einem im Alter von x Jahren invalid gewordenen Aktiven ergibt sich mithin auf Grund derselben Familienstandstabelle, einer Frauensterbetafel und einer Invalidenabfallsordnung

$${}^{i}\mathrm{a}_{x(y)}^{(12)} = \frac{{}^{a}\mathrm{L}_{xy_1}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x|y_1}^{(12)} + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_2}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x|y_2}^{(12)} + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_3}\,{}^{i}\mathrm{a}_{x|y_3}^{(12)} + \cdots\cdots + {}^{a}\mathrm{L}_{xy_\nu}\,{}^{i}\mathrm{a}_{xy_\nu}^{(12)}}{{}^{a}\mathrm{L}_x}$$

oder wenn man die Summe

$${}^{a}L_{x y_1}\,{}^{i}a^{(12)}_{x|y_1} + {}^{a}L_{x y_2}\,{}^{i}a^{(12)}_{x|y_2} + {}^{a}L_{x y_3}\,{}^{i}a^{(12)}_{x|y_3} + \cdots\cdots + {}^{a}L_{x y_\nu}\,{}^{i}a^{(12)}_{x|y_\nu} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} {}^{a}L_{x y_\mu}\,{}^{i}a^{(12)}_{x|y_\mu}$$

setzt,

$${}^{i}a^{(12)}_{x(y)} = \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=\nu} {}^{a}L_{x y_\mu}\,{}^{i}a^{(12)}_{x y_\mu}}{{}^{a}L_x}.$$

Unter Anwendung dieser beiden Durchschnittswerte der Witwenrenten ${}^{a}a^{(12)}_{x(y)}$ und ${}^{i}a^{(12)}_{x(y)}$ läßt sich nunmehr der *Barwert der Anwartschaft auf die Witwenrente nach einem Aktiven* im Alter von x Jahren folgendermaßen ermitteln.

a) Die Wahrscheinlichkeit, daß ein $x$jähriger Aktiver im Laufe des ersten Jahres als Aktiver stirbt ist gleich $\frac{{}^{aa}d_x}{{}^{a}l_x}$.

Nimmt man an, daß die Sterbefälle in der Mitte des Jahres stattfinden, so ist der Barwert des fälligen Durchschnittswertes der Witwenrente ${}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)}$, bezogen auf den Anfang des Jahres,

$$v^{\frac{1}{2}}\,\frac{{}^{aa}d_x}{{}^{a}l_x}\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\,\frac{{}^{aa}C_x\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)}}{{}^{a}D_x},$$

worin ${}^{aa}C_x$ das Produkt aus ${}^{aa}d_x\,v^{x+1}$ darstellt.

Der Barwert des im folgenden Jahre fälligen Durchschnittswertes der Witwenrente ${}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{3}{2}(y)}$, bezogen auf den Anfang des ersten Jahres, ist gleich

$$v^{\frac{3}{2}}\,\frac{{}^{aa}d_{x+1}}{{}^{a}l_x}\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{3}{2}(y)} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\,\frac{{}^{aa}C_{x+1}\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{3}{2}(y)}}{{}^{a}D_x}$$

und analog erhält man auch dementsprechende Werte für die folgenden Jahre.

b) Die Wahrscheinlichkeit, daß ein $x$jähriger Aktiver im Laufe des ersten Jahres invalid wird, ist gleich $\frac{J_x}{{}^{a}l_x}$. Unter der Annahme, daß die Aktiven in der Mitte des Jahres invalid werden, ist der Barwert des fälligen Durchschnittswertes der Witwenrente ${}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)}$, bezogen auf den Anfang des Jahres, gleich

$$v^{\frac{1}{2}}\,\frac{J_x}{{}^{a}l_x}\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\,\frac{{}^{J}D_x\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)}}{{}^{a}D_x},$$

worin ${}^{J}D_x$ ebenfalls das Produkt aus $J_x\,v^{x+1}$ darstellt.

Ebenso findet man den Barwert des im folgenden Jahre fälligen Durchschnittswertes der Witwenrente ${}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{3}{2}(y)}$, bezogen auf den Beginn des ersten Jahres,

$$v^{\frac{3}{2}}\,\frac{J_{x+1}}{{}^{a}l_x}\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{3}{2}(y)} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\,\frac{{}^{J}D_{x+1}\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{3}{2}(y)}}{{}^{a}D_x}$$

und ähnliche Werte für die folgenden Jahre.

Durch Addition der aus dem ersten und jedem folgenden Jahre sich ergebenden Anwartschaften erhält man den Barwert der gesamten Witwenanwartschaft eines $x$jährigen Aktiven, den wir mit ${}^{ai}a_{x(y)}$ bezeichnen, so daß

$${}^{ai}a_{x(y)} = \frac{\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\left({}^{aa}C_x\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)} + {}^{J}D_x\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)}\right)}{{}^{a}D_x} + \frac{\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\left({}^{aa}C_{x+1}\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{3}{2}(y)} + {}^{J}D_{x+1}\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{3}{2}(y)}\right) + \cdots\cdots}{{}^{a}D_x}$$

ist.

Die Durchschnittswerte ${}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)}$ und ${}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)}$ können durch arithmetische Mittel der benachbarten Werte ausgedrückt werden, d. i.

$${}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)} = \frac{{}^{a}a^{(12)}_{x(y)} + {}^{a}a^{(12)}_{x+1(y)}}{2} \quad \text{und} \quad {}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)} = \frac{{}^{i}a^{(12)}_{x(y)} + {}^{i}a^{(12)}_{x+1(y)}}{2}.$$

Setzt man

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\left({}^{aa}C_x\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)} + {}^{J}D_x\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(y)}\right) = {}^{ai}D_{x(y)},$$

so erhält man

$${}^{ai}a_{x(y)} = \frac{{}^{ai}D_{x(y)} + {}^{ai}D_{x+1(y)} + {}^{ai}D_{x+2(y)} + \cdots}{{}^{a}D_x}$$

und, wenn man die Summe ${}^{ai}D_{x(y)} + {}^{ai}D_{x+1(y)} + {}^{ai}D_{x+2(y)} + \cdots\cdots$ mit ${}^{ai}N_{x(y)}$ bezeichnet,

$${}^{ai}a_{x(y)} = \frac{{}^{ai}N_{x(y)}}{{}^{a}D_x}.$$

2. *Ist eine mjährige Karenz vereinbart*, d. h. erhalten die Witwen nach den in den ersten m Jahren invalid gewordenen oder in der Aktivität verstorbenen Mitglieder des Pensionsvereines keine Witwenrente, so erhält man, analog der um m Jahre aufgeschobenen Leibrente,

$$ {}^{ai}_{m|}a_{x(y)} = \frac{{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m(y)}}{{}^{a}D_x}. $$

3. Wenn die Witwenrente mit der Dienstzeit des Mannes derart steigen soll, daß die Witwen nach der im ersten, zweiten, dritten usw. ... Jahre verstorbenen Vereinsmitglieder eine im voraus zahlbare Monatsrente mit dem Jahresbetrage von einer, zwei, drei usw. ..... Einheiten erhalten, so ist der *Barwert* dieser *Anwartschaft auf die steigende Witwenpension,* wenn man ihn mit $(I\,{}^{ai}a)_{x(y)}$ bezeichnet,

$$ (I\,{}^{ai}a)_{x(y)} = \frac{{}^{ai}D_{x(y)} + 2\,{}^{ai}D_{x+1(y)} + 3\,{}^{ai}D_{x+2(y)} + \cdots\cdots}{{}^{a}D_x} $$

oder, wenn man, analog der veränderlichen Leibrente,

$$ {}^{ai}D_{x(y)} + 2\,{}^{ai}D_{x+1(y)} + 3\,{}^{ai}D_{x+2(y)} + \cdots\cdots = \Sigma\,{}^{ai}\mathbb{N}_{x(y)} = {}^{ai}\mathbb{S}_{x(y)} $$

setzt

$$ (I\,{}^{ai}a)_{x(y)} = \frac{{}^{ai}\mathbb{S}_{x(y)}}{{}^{a}D_x}. $$

4. Steigt die Witwenrente nur bis zum Betrage von n Einheiten und bleibt dann konstant, so ist der *Barwert der Anwartschaft dieser steigenden Witwenpension,* wenn man dieselbe mit $(I_{\overline{n}|}\,{}^{ai}a)_{x(y)}$ bezeichnet, ähnlich wie bei der steigenden Leibrente

$$ (I_{\overline{n}|}\,{}^{ai}a)_{x(y)} = \frac{{}^{ai}\mathbb{S}_{x(y)} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+n(y)}}{{}^{a}D_x}. $$

5. Wird überdies noch eine *mjährige Karenz* (wie auf der Seite 243) vorausgesetzt, so ist der *Barwert* dieser *aufgeschobenen steigenden Witwenrente*

$$ {}_{m+1|}(I_{\overline{n}|}\,{}^{ai}a)_{x(y)} = \frac{{}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1(y)} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1(y)}}{{}^{a}D_x}. $$

6. Soll die Witwenpension nach einer $m$jährigen Karenzzeit mit α Prozent des Gehaltes, das der Mann hat, beginnen, durch n Jahre für jedes weitere Dienstjahr um β Prozent bis zur Erreichung des Höchstbetrages von $(\alpha + n\beta)$ Prozent des Gehaltes steigen und dann konstant bleiben, so ist der *Barwert der Anwartschaft auf diese kombinierte Witwenpension*

$$ 0{\cdot}01\,\alpha\,\frac{{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m(y)}}{{}^{a}D_x} + 0{\cdot}01\,\beta\,\frac{{}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1(y)} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1(y)}}{{}^{a}D_x} $$

oder

$$ 0{\cdot}01\,\frac{\alpha\,{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m(y)} + \beta\,({}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1(y)} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1(y)})}{{}^{a}D_x}. $$

Beispiel.

Bezugnehmend auf das auf Seite 244 angeführte Beispiel soll die Pension des Beamten nach 10jähriger Dienstzeit 40 Prozent des Gehaltes betragen und für jedes weitere Dienstjahr um 2·4 Prozent bis zum Maximum von 100 Prozent des Gehaltes steigen, welches zur Zeit seiner Pensionierung mit K 6.000.— bemessen wird. Wie groß ist der Barwert der Anwartschaft eines 30jährigen Beamten auf die Pension der Witwe, wenn dieselbe nur $^2/_3$ der Pension des Mannes betragen soll und wenn bezüglich der Witwenrente dieselben Bestimmungen über ihren Beginn und ihr Steigerungsverhältnis wie beim Manne gelten?

Setzt man in dem Ausdrucke

$$ 0{\cdot}01\,\frac{\alpha\,{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m(y)} + \beta\,({}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1(y)} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1(y)})}{{}^{a}D_x} $$

$x = 30$, $m = 10$, $\alpha = 40$, $\beta = 2{\cdot}4$ und $n = 25$, so erhält man nach Tafel XIV und XV für diese Anwartschaft den Barwert

$$ 0{\cdot}01\,\frac{40 \times 61418{\cdot}3 + 2{\cdot}4\,(750928{\cdot}7 - 17781{\cdot}5)}{28393} = 1{\cdot}484973. $$

Der Barwert dieser Anwartschaft auf die Witwenpension beträgt für die Einheit 1·484973 und für $^2/_3$ des Gehaltes von K 6.000·—: K 5.939·90.

Nach 25 Dienstjahren wird der Barwert der Anwartschaft auf die Witwenpension des dann 55jährigen Beamten nach denselben Tafeln für die Einheit

$$ 0{\cdot}01\,\frac{(\alpha + 15\beta)\,{}^{ai}\mathbb{N}_{55(y)} + \beta\,({}^{ai}\mathbb{S}_{56(y)} - {}^{ai}\mathbb{S}_{66(y)})}{{}^{a}D_{55}} = 3{\cdot}063189 $$

und für das $^2/_3$ des vollen Gehaltes K 12.252·76 betragen.

§ 90. *Wert der Anwartschaft eines Aktiven auf die Waisenrente.*

Die Erziehungsbeiträge oder Waisenrenten werden vom Tode des Vaters bis zur Erreichung oder Vollendung eines bestimmten Alters des Kindes gezahlt und haben daher den Charakter einer fest begrenzten, d. i. einer kurzen Rente.

Durch Erhebungen sei festgestellt, daß bei den ${}^{a}L_x$ aktiven, $x$jährigen Männern von denen ein Teil ledig, ein anderer verheiratet, ein dritter geschieden oder verwitwet ist, ${}^{a}K_{xz_1}$ $z_1$jährige, ${}^{a}K_{xz_2}$ $z_2$jährige usw. ...... ${}^{a}K_{xz_\nu}$ $z_\nu$jährige Kinder unter 18 Jahren überhaupt vorhanden sind.

Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, daß ein $x$jähriger Aktiver überhaupt Vater von anspruchsberechtigten Kindern ist, mit ${}^{a}k_x$, so ist der Wert dieser Wahrscheinlichkeit

$$ {}^{a}k_{x} = \frac{{}^{a}\mathrm{K}_{x z_1} + {}^{a}\mathrm{K}_{x z_2} + \cdots\cdots + {}^{a}\mathrm{K}_{x z_\nu}}{{}^{a}\mathrm{L}_{x}} = \frac{\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} {}^{a}\mathrm{K}_{x z_\mu}}{{}^{a}\mathrm{L}_{x}}, $$

während die Wahrscheinlichkeit, daß ein $x$jähriger Aktiver ein Kind von einem bestimmten Alter z. B. z_1 besitzt, den Wert

$$ {}^{a}k_{x z_1} = \frac{{}^{a}\mathrm{K}_{x z_1}}{{}^{a}\mathrm{L}_{x}} $$

hat.

1. Die Berechnung des Barwertes der Anwartschaft eines Aktiven auf die Waisenrente läßt sich in ganz ähnlicher Weise durchführen, wie die auf die Witwenrente bezügliche.

Bedeutet z das Alter des anspruchsberechtigten Kindes, wobei $z < 18$ ist, so erhält man als *durchschnittlichen Barwert der Waisenrente* nach einem $x$jährigen Aktiven, wenn der Versicherte im $x$ten Lebensjahre als Aktiver stirbt,

$$ {}^{a}\mathrm{a}_{x(z)}^{(12)} = \frac{\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} {}^{a}\mathrm{K}_{x z_\mu}\, \mathrm{a}_{z_\mu}^{(12)}}{{}^{a}\mathrm{L}_{x}}. $$

Ferner erhält man als *durchschnittlichen Barwert der Waisenrente* nach einem im $x$ten Lebensjahre invalid gewordenen Aktiven

$$ {}^{i}\mathrm{a}_{x(z)}^{(12)} = \frac{\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu} {}^{a}\mathrm{K}_{x z_\mu}\, {}^{i}\mathrm{a}_{x|z_\mu}^{(12)}}{{}^{a}\mathrm{L}_{x}}, $$

worin

$$ {}^{i}\mathrm{a}_{x|z}^{(12)} = \frac{{}^{i}\mathrm{D}_{x z} + {}^{i}\mathrm{D}_{x+1:z+1} + \cdots\cdots}{{}^{i}\mathrm{D}_{x}\, l_z} = \frac{{}^{i}\mathbb{N}_{x z}}{{}^{i}\mathrm{D}_{x}\, l_z} $$

und

$$ {}^{i}\mathrm{D}_{x z} = \frac{{}^{i}\mathrm{C}_{x}\, l_{z+1}}{v^{\frac{1}{2}}} \, \frac{\mathrm{a}_{z}^{(12)} + \mathrm{a}_{z+1}^{(12)}}{2} $$

ist.

Aus diesen beiden Durchschnittswerten ergibt sich der *Barwert der Anwartschaft eines xjährigen Aktiven auf die Waisenrente*

$$ {}^{ai}\mathrm{a}_{x(z)}^{(12)} = \frac{{}^{ai}\mathbb{N}_{x(z)}}{{}^{a}\mathrm{D}_{x}}, $$

worin ${}^{ai}\mathbb{N}_{x(z)}$ die Summe von

$$ {}^{ai}\mathrm{D}_{x(z)} + {}^{ai}\mathrm{D}_{x+1(z)} + {}^{ai}\mathrm{D}_{x+2(z)} + \cdots\cdots $$

bedeutet und

$$ {}^{ai}\mathrm{D}_{x(z)} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \left\{ {}^{aa}\mathrm{C}_{x}\, {}^{a}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}(z)}^{(12)} + {}^{J}\mathrm{D}_{x}\, {}^{i}\mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}(z)}^{(12)} \right\} $$

ist.

2. *Ist eine mjährige Karenz festgesetzt*, so ist der Barwert dieser Anwartschaft auf eine Waisenrente

$$ {}^{ai}_{m|}\mathrm{a}_{x(z)} = \frac{{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m:z}}{{}^{a}\mathrm{D}_{x}}. $$

Nach dieser Art der Ableitung der Waisenrenten erhält jedes Kind, das unter 18 Jahren alt ist, nach dem Tode des Vaters eine vorschüssige Monatsrente im jährlichen Betrage einer Einheit.

3. Sieht man bei der Berechnung der Anwartschaft eines $x$jährigen Aktiven auf die Waisenrente, wie wir es bis jetzt getan haben, davon ab, zu unterscheiden, ob er als Aktiver oder als Invalider stirbt und wendet eine Sterbetafel an, die Aktive und Invalide zusammen enthält, so gelangt man durch folgende einfachere Rechnung zu dem verlangten Werte dieser Anwartschaft.

Die Wahrscheinlichkeit einer von der l_x lebenden $x$jährigen Person im ersten, zweiten, dritten, usw. ...... Jahre zu sterben ist gleich

$$ \frac{d_x}{l_x}, \quad \frac{d_{x+1}}{l_x}, \quad \frac{d_{x+2}}{l_x}, \quad \text{usw.} \quad \ldots\ldots $$

Nimmt man an, daß die Sterbefälle durchschnittlich in der Mitte des Jahres eintreten, so ist der Barwert der fälligen Kinderrenten

$$ \mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}(z)}^{(12)}, \quad \mathrm{a}_{x+\frac{3}{2}(z)}^{(12)}, \quad \mathrm{a}_{x+\frac{5}{2}(z)}^{(12)}, \quad \text{usw.} \ldots\ldots, $$

bezogen auf den Beginn des ersten Jahres, gleich

$$ v^{\frac{1}{2}} \frac{d_x}{l_x} \mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}(z)}^{(12)}, \quad v^{\frac{3}{2}} \frac{d_{x+1}}{l_x} \mathrm{a}_{x+\frac{3}{2}(z)}^{(12)}, \quad v^{\frac{5}{2}} \frac{d_{x+2}}{l_x} \mathrm{a}_{x+\frac{5}{2}(z)}^{(12)}, \quad \text{usw.} \ldots\ldots $$

Die Summe dieser Barwerte gibt den Barwert der Gesamtbelastung und man erhält, wenn wir ihn mit $\mathrm{a}_{x(z)}^{(12)}$ bezeichnen,

$$ \mathrm{a}_{x(z)}^{(12)} = \frac{v^{\frac{1}{2}} d_x \mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}(z)}^{(12)} + v^{\frac{3}{2}} d_{x+1} \mathrm{a}_{x+\frac{3}{2}(z)}^{(12)} + v^{\frac{5}{2}} d_{x+2} \mathrm{a}_{x+\frac{5}{2}(z)}^{(12)} + \cdots\cdots}{l_x}. $$

Multipliziert man Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite dieser Gleichung mit v^x, so bekommt man

$$ \mathrm{a}_{x(z)}^{(12)} = \frac{\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \mathrm{C}_x \mathrm{a}_{x+\frac{1}{2}(z)}^{(12)} + \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \mathrm{C}_{x+1} \mathrm{a}_{x+\frac{3}{2}(z)}^{(12)} + \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \mathrm{C}_{x+2} \mathrm{a}_{x+\frac{5}{2}(z)}^{(12)} + \cdots\cdots}{\mathrm{D}_x}. $$

Setzt man

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} C_x \, a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(z)} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} C_x \frac{a^{(12)}_{x(z)} + a^{(12)}_{x+1(z)}}{2} = D_{x(z)},$$

so ist

$$a^{(12)}_{x(z)} = \frac{D_{x(z)} + D_{x+1(z)} + D_{x+2(z)} + \cdots\cdots}{D_x}$$

oder, wenn man die Summe

$$D_{x(z)} + D_{x+1(z)} + D_{x+2(z)} + \cdots\cdots$$

mit $\mathbb{N}_{x(z)}$ bezeichnet,

$$a^{(12)}_{x(z)} = \frac{\mathbb{N}_{x(z)}}{D_x}.$$

4. *Ist eine mjährige Karenz vereinbart,* d. h., wenn der Vater innerhalb dieser Zeit stirbt oder invalid wird, so haben die Kinder keinen Anspruch auf einen Erziehungsbeitrag, dann ist der Barwert der Anwartschaft eines $x$jährigen Aktiven auf die Waisenrente gleich

$$_{m|}a^{(12)}_{x(z)} = \frac{\mathbb{N}_{x+m(z)}}{D_x}.$$

Beispiel.

Die Pension eines 30jährigen Beamten soll, wenn wir uns auf das auf Seite 244 angeführte Beispiel beziehen, nach 10jähriger Dienstzeit 40 Prozent des Gehaltes von K 6.000·— betragen und für jedes weitere Dienstjahr um 2·4 Prozent bis zu 100 Prozent des Gehaltes steigen. Wie groß ist der Barwert der Anwartschaft dieses Beamten auf eine Waisenrente, wenn sie mit $^1/_{10}$ des Gehaltes, d. i. mit K 600·— jährlich bemessen wird?

Unter Anwendung der Gleichung

$$^{ai}_{m|}a^{(12)}_{x(z)} = \frac{^{ai}\mathbb{N}_{x+m(z)}}{^{a}D_x}$$

und der Tafel XVI (nach Kürzung um 15 Prozent im Sinne des Pensionsgesetzes) erhält man

$$^{ai}_{10|}a^{(12)}_{30(z)} = \frac{33059{\cdot}4}{28590{\cdot}1} = 1{\cdot}15632.$$

Der Barwert dieser Anwartschaft auf die Waisenrente beträgt für die Einheit 1·15632 und für $^1/_{10}$ des Gehaltes von K 6.000·—: K 693·79.

Nach 25jähriger Dienstzeit ist der Barwert der Anwartschaft auf die Waisenrente des dann 55jährigen Beamten nach derselben Tafel für die Einheit

$$^{ai}a^{(12)}_{55(z)} = \frac{^{ai}\mathbb{N}_{55(z)}}{^{a}D_{55}} = 0{\cdot}83753$$

und für $^1/_{10}$ des Gehaltes K 502·52.

§ 91. *Wert der Anwartschaft eines Aktiven auf die einmalige Abfertigung.*

In den Statuten mancher Pensionsinstitute ist oft die Bestimmung enthalten, den Witwen, beziehungsweise den hinterlassenen Kindern im Falle, daß der versicherte Aktive noch vor Ablauf der Karenz (Wartezeit) stirbt, eine einmalige, gewöhnlich in Prozenten des Gehaltes ausgedrückte Abfertigung zu gewähren.

Der Wert des Anspruches eines $x$jährigen Aktiven auf eine einmalige Abfertigung einer Einheit, den wir mit $^{ai}_{|m}a_{x(h)}$ bezeichnen, kann daher als Barwert einer kurzen Todesfallversicherung des Aktiven auf die Abfertigungseinheit dargestellt werden.

Bedeutet $^{a}h_x$ die Wahrscheinlichkeit des Verheiratetseins eines $x$jährigen Aktiven und $\frac{^{aa}d_x}{^{a}l_x}$ die Wahrscheinlichkeit, daß der $x$jährige Aktive im ersten Jahre als Aktiver stirbt, so ist, wenn wir wiederum annehmen, daß die Sterbefälle durchschnittlich in der Mitte des Jahres erfolgen, der Wert der Abfertigungseinheit, bezogen auf den Beginn des ersten Jahres, gleich

$$v^{\frac{1}{2}} \frac{^{aa}d_x}{^{a}l_x} {}^{a}h_x = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \frac{^{aa}C_x \, {}^{a}h_x}{^{a}D_x}.$$

Ebenso ist der Wert der im zweiten Jahre fälligen Abfertigungseinheit, bezogen auf den Beginn des ersten Jahres, gleich

$$v^{\frac{3}{2}} \frac{^{aa}d_{x+1}}{^{a}l_x} {}^{a}h_{x+1} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \frac{^{aa}C_{x+1} \, {}^{a}h_{x+1}}{^{a}D_x}$$

usw. und der Wert der im $m$ten Jahre fälligen Einheit, bezogen auf den Beginn des ersten Jahres, gleich

$$v^{\frac{2m-1}{2}} \frac{^{aa}d_{x+m-1}}{^{a}l_x} {}^{a}h_{x+m-1} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \frac{^{aa}C_{x+m-1} \, {}^{a}h_{x+m-1}}{^{a}D_x}.$$

Der gesamte Barwert des Anspruches eines $x$jährigen Invaliden auf die einmalige Abfertigung einer Einheit ergibt sich als die Summe der Barwerte der einzelnen Abfertigungseinheiten, so daß

$$^{ai}_{|m}a_{x(h)} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \frac{^{aa}C_x \, {}^{a}h_x + {}^{aa}C_{x+1} \, {}^{a}h_{x+1} + \cdots\cdots + {}^{aa}C_{x+m-1} \, {}^{a}h_{x+m-1}}{^{a}D_x}$$

ist.

Setzen wir den Ausdruck

$$\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\left({}^{aa}C_x\,{}^{a}h_x + {}^{aa}C_{x+1}\,{}^{a}h_{x+1} + \cdots\right) = {}^{a}_{h}M_x,$$

so erhält man für diese Anwartschaft den Wert

$$ {}^{ai}_{|m}a_{x(h)} = \frac{{}^{a}_{h}M_x - {}^{a}_{h}M_{x+m}}{{}^{a}D_x}. $$

Beispiel.

Wie groß ist, bezugnehmend auf das auf Seite 244 angeführte Beispiel, der Barwert der Anwartschaft auf eine Abfertigung des 30jährigen Beamten, wenn eine 10jährige Wartezeit festgesetzt ist und die Abfertigung 80 Prozent seines Gehaltes, d. i *K* 4.800·— beträgt?

Wendet man die Gleichung an

$$ {}^{ai}_{|m}a_{x(h)} = \frac{{}^{a}_{h}M_x - {}^{a}_{h}M_{x+m}}{{}^{a}D_x}, $$

so erhält man nach Tafeln XIV und XVI für den Barwert der Abfertigungseinheit

$$ {}^{ai}_{|10}a_{30(h)} = \frac{3850{\cdot}65 - 2688{\cdot}61}{28393} = 0{\cdot}040927 $$

und für den Barwert der Abfertigung von 80 Prozent des Gehaltes, d. i. von *K* 4.800·— den Betrag von *K* 196·45.

2. Jahresprämien für die von der Invalidität abhängigen Versicherungen.

§ 92. *Jahresprämie für die Invaliditäts- und Altersrente, Witwen- und Waisenrente und für die einmalige Abfertigung.*

Bezeichnet A die Einmalprämie, d. i. den Barwert irgend einer Anwartschaft, mag dieselbe eine Invaliditäts- und Altersrente, eine Witwen- oder Waisenrente oder eine einmalige Abfertigung bedeuten, bezeichnet ferner $P_{(x)}$ die Jahresprämie, die der $x$jährige Aktive während einer bei seinem Dienstantritte schon im voraus zu bestimmenden Anzahl von Dienstjahren zu zahlen hat, so muß, da der jährliche Einheitsbetrag des Versicherten sich als ${}_{|m+n}{}^{a}a_x^{(12)}$, d. i. als eine kurze Aktivitätsrente auf die Anzahl der $(m+n)$ Dienstjahre, ergibt, die Gleichung

$$ P_{(x)|m+n}\,{}^{a}a_x^{(12)} = A $$

bestehen, woraus folgt, wenn man

$$ {}_{|m+n}{}^{a}a_x^{(12)} = \frac{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}{{}^{a}D_x} $$

setzt,

$$ P_{(x)} = \frac{A\,{}^{a}D_x}{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}} $$

1. So z. B. ist die Jahresprämie, die ein $x$jähriger Aktiver für die Invaliditäts- und Altersrente in Monatsraten zahlt, wenn sie nach einer $m$jährigen Karenzzeit mit α Prozent der Gehaltseinheit beginnt, durch n Jahre um β Prozent steigt und dann als Altersrente mit dem jährlichen Betrage von $(\alpha + n\beta)$ Prozent der Gehaltseinheit unbedingt bezogen werden kann,

$$ P_{r(x)} = 0{\cdot}01\,\frac{\alpha\,{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m} + \beta\left({}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1}\right) + (\alpha + n\beta)\,{}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}. $$

2. Wenn bezüglich der Witwenrente die gleichen Vereinbarungen wie im vorhergehenden Beispiele über ihren Beginn und ihr Steigerungsverhältnis getroffen sind, so beträgt die Jahresprämie für die Gehaltseinheit, die der $x$jährige Aktive dafür zu zahlen hat,

$$ P_{x(y)} = 0{\cdot}01\,\frac{\alpha\,{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m(y)} + \beta\left({}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+1(y)} - {}^{ai}\mathbb{S}_{x+m+n+1(y)}\right)}{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}. $$

3. Für die Waisenrente mit einer $m$jährigen Karenz hat die Jahresprämie, die der $x$jährige Versicherte für die Gehaltseinheit zu zahlen hat, den Wert

$$ P_{x(z)} = \frac{{}^{ai}\mathbb{N}_{x+m(z)}}{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}. $$

4. Als Jahresprämie für die einmalige Abfertigung ergibt sich der Wert

$$ P_{x(h)} = \frac{{}^{a}_{h}M_x - {}^{a}_{h}M_{x+m}}{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}. $$

5. Soll die Jahresprämie, die der $x$jährige Aktive während seiner Dienstzeit zu zahlen hat, dazu dienen, alle Anwartschaften zu decken, deren Barwerte wir der Reihe nach mit X_x, Y_x, Z_x und U_x bezeichnen, so daß

X_x den Barwert der Anwartschaft auf die Invaliditäts- und Altersrente,
Y_x „ „ „ „ „ „ Witwenrente,
Z_x „ „ „ „ „ „ Waisenrente und
U_x „ „ „ „ „ „ einmalige Abfertigung darstellt, so ist in diesem Falle die Jahresprämie

$$ P_{(x)} = \frac{(X_x + Y_x + Z_x + U_x)\,{}^{a}D_x}{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}. $$

So ist, bezugnehmend auf die auf Seite 244, 251, 254 und 256 angeführten Beispiele, für den 30jährigen Beamten der Barwert der Anwartschaft

auf die Invaliditäts- und Altersrente	$X_x = K$	8.809·67,
„ „ Witwenrente	$Y_x = K$	5.939·90,
„ „ Waisenrente	$Z_x = K$	693·78 und
„ „ einmalige Abfertigung	$U_x = K$	196·45;

daher ist der Gesamtbarwert dieser Anwartschaften

$$X_x + Y_x + Z_x + U_x = K\ 15.639{\cdot}80.$$

Die Jahresprämie, die der 30jährige Beamte durch 35 Jahre in Monatsraten zu zahlen hätte, beträgt nach der Gleichung

$$P_{(x)} = \frac{(X_x + Y_x + Z_x + U_x)\, {}^{a}D_x}{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}$$

und nach Tafel XIV

$$P_{30} = \frac{15.639{\cdot}80 \times 28393}{451067 - 8616{\cdot}0} = 1003{\cdot}64,$$

d. h. er müßte für die gesamten Anwartschaften auf die Pensionen und auf die Abfertigung jährlich K 1.003·64 oder monatlich K 83·64 zahlen.

6. Gewöhnlich werden bei den Pensionsinstituten die Jahresprämien nicht nach dem Beitrittsalter ermittelt, sondern es werden für alle Mitglieder Prämien berechnet, die in Prozenten des Jahresgehaltes ausgedrückt werden. Solche Prämien heißen *Durchschnittsprämien* und werden folgendermaßen gefunden. Man bildet zunächst die Summe aller Anwartschaften für jedes dem Pensionsinstitute angehörende Mitglied und erhält auf diese Art den Wert aller an das Pensionsinstitut zu leistenden Zahlungen, die wir mit A bezeichnen, so daß

$$A = \Sigma X_x + \Sigma Y_x + \Sigma Z_x + \Sigma U_x$$

darstellt.

Dann bildet man, wenn G_x die Summe der anrechenbaren Gehälter aller $x$jährigen Mitglieder bei ihrem Dienstantritte bedeutet, davon ein Prozent und multipliziert es mit dem Barwert der kurzen Aktivitätsrente ${}_{m+n}{}^{a}a_x^{(12)}$, welches Produkt den gegenwärtigen Wert aller künftigen Beiträge von einem Prozent des Gehaltes der $x$jährigen Mitglieder vorstellt. Durch Wiederholung dieser Rechnung für jedes Alter und durch Addition der so gebildeten Produkte erhält man den Barwert der Beitragsleistung für ein Prozent des Gehaltes aller aktiven Mitglieder. Bezeichnen wir denselben mit B, so ist

$$B = \Sigma 0{\cdot}01\, G_x\, {}_{m+n}{}^{a}a_x^{(12)}$$

oder

$$B = 0{\cdot}01\, \Sigma G_x \frac{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}{{}^{a}D_x}$$

Aus A und B erhält man durch Division die *Durchschnittsprämie* in Prozenten des anrechenbaren Gehaltes ausgedrückt, so daß, wenn wir die Durchschnittsprämie mit P bezeichnen, sich für sie der Wert ergibt:

$$P = \frac{A}{B}$$

oder

$$P = \frac{\Sigma X_x + \Sigma Y_x + \Sigma Z_x + \Sigma U_x}{0{\cdot}01\, \Sigma G_x \dfrac{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^{a}\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}{{}^{a}D_x}}.$$

Dieser Bruch gibt an, wie viel Prozent seines Gehaltes jedes aktive Mitglied, ohne Rücksicht auf sein Alter während seiner Dienstzeit jährlich (durch Abzug vom Monatsgehalte) an das Pensionsinstitut zu entrichten hat.

Würden jedoch die versicherten Mitglieder *nicht* das Recht haben, nach einer bestimmten Anzahl von Dienstjahren auch ohne Nachweis der eingetretenen Invalidität in den Genuß der Altersrente zu gelangen, so entfällt mithin die Altersrente ${}_{m+n|}{}^{a}a_x^{(12)}$ und bei der Berechnung der individuellen Jahresprämie wie auch der Durchschnittsprämie ist an Stelle der kurzen Aktivitätsrente ${}_{m+n}{}^{a}a_x^{(12)}$ einfach die lebenslängliche Aktivitätsrente

$${}^{a}a_x^{(12)} = \frac{{}^{a}\mathbb{N}_x^{(12)}}{{}^{a}D_x}$$

zu benützen.

3. Prämienreserve für die von der Invalidität abhängigen Versicherungen.

§ 93. *Berechnung der Prämienreserve.*

Pensionsinstitute haben wie alle Versicherungsanstalten eine *Prämienreserve* anzusammeln, deren Berechnung nach der *retrospektiven* oder nach der *prospektiven* Methode durchgeführt werden kann, je nachdem dieselbe in dem Zeitraume bis zum Ablauf der Karenz (Wartezeit) oder in der darauffolgenden Periode erfolgt.

Findet die Berechnung der Prämienreserve s Jahre nach dem Dienstantritte des versicherten $x$jährigen Mitgliedes statt, so ist, vorausgesetzt, daß $s < m$ (Wartezeit) ist, die Prämienreserve nach der

retrospektiven Methode, da das Versicherungsinstitut für den Versicherten bis dahin keine Zahlungen geleistet hat, gleich dem auf den Tag der Prämienreserveberechnung (Stichtag) bezogenen aufgezinsten Barwerte aller eingegangenen Nettoprämien. Bedeutet P_x die Jahresprämie für die Invaliditäts- und Altersrente oder für die Witwen- oder Waisenrente oder endlich für die einmalige Abfertigung, so hat, wenn wir die Prämienreserve mit ${}_sV_x$ bezeichnen, dieselbe den Wert

$$ {}_sV_x = \frac{{}^aD_x}{{}^aD_{x+s}} \cdot P_x \frac{{}^a\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^a\mathbb{N}_{x+s}^{(12)}}{{}^aD_x} $$

oder

$$ {}_sV_x = P_x \frac{{}^a\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^a\mathbb{N}_{x+s}^{(12)}}{{}^aD_{x+s}}. $$

Die Prämienreserve nach Ablauf der Wartezeit wird für die noch laufenden Verträge am einfachsten nach der prospektiven Methode berechnet.

Bedeutet A_s den Barwert der künftigen Zahlungen des Institutes an den Versicherten, d. i. den Barwert der Anwartschaft auf die Invaliditäts- und Altersrente oder auf die Witwenrente oder endlich auf die Erziehungsbeiträge (Waisenrente), also jene Einmalprämie, die s Jahre nach Abschluß der Versicherung für dieselbe Versicherung zu zahlen wäre, bedeutet ferner P_x die jährliche Prämie des versicherten $x$jährigen Mitgliedes, so ist für $s > m$ die Prämienreserve nach s Jahren

$$ {}_sV_x = A_s - P_x \, {}_{m+n-s|}{}^a a_{x+s}^{(12)} $$

oder

$$ {}_sV_x = A_s - P_x \frac{{}^a\mathbb{N}_{x+s}^{(12)} - {}^a\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}{{}^aD_{x+s}}. $$

Für bereits flüssige Renten sind als Prämienreserven die Einmalprämien einzustellen.

Diese beiden für die Berechnung der Prämienreserve ermittelten Gleichungen gelten nur für ganzzahlige s. Für eine nicht ganze Anzahl von Versicherungsjahren wendet man die auf Seite 190 entwickelte Gleichung für Reserveberechnung an, so daß die Bilanzreserve nach $s + \frac{n}{t}$ Jahren gleich

$$ {}_{s+\frac{r}{t}}V_x = {}_sV_x + \frac{n}{t}\left({}_{s+1}V_x - {}_sV_x\right) $$

ist.

Beispiel.

Bezugnehmend auf das auf Seite 244 entwickelte Beispiel hat ein 30jähriger Beamter eine Anwartschaft auf die Invaliditäts- und Alters-

rente versichert, welche nach 10jähriger Karenz mit 40 Prozent des Gehaltes von K 6.000·— beginnt, durch 25 Jahre um 2·4 Prozent steigt und welche dann, also nach 35 Dienstjahren als Altersrente mit vollem Gehalte bezogen werden kann, ferner auf die Witwenrente mit dem gleichen Beginne und Steigerungsverhältnisse wie beim Manne auf $^2/_3$ des Gehaltes, d. i. auf K 4.000·—, auf die Waisenrente mit $^1/_{10}$ des Gehaltes, d. i. mit K 600·— und auf eine einmalige Abfertigung von 80 Prozent des Gehaltes, d. i. von K 4.800·—. Wie groß ist die Prämienreserve für alle Anwartschaften nach 5 und wie groß nach 25 Jahren?

Die Prämienreserve nach $s = 5$ Jahren beträgt unter Anwendung der Gleichung

$$ {}_sV_x = P_x \frac{{}^a\mathbb{N}_x^{(12)} - {}^a\mathbb{N}_{x+s}^{(12)}}{{}^aD_{x+s}} $$

und, da die auf Seite 258 ermittelte Jahresprämie P_x den Wert von K 1.003·64 hat, nach Tafel XIV

$$ {}_5V_{30} = 1.003{\cdot}64 \, \frac{451\,067 - 324\,424}{22371} = 5681{\cdot}64. $$

Die Prämienreserve hat mithin nach Ablauf von 5 Jahren einen Wert von K 5.681·64.

Für die Berechnung der Prämienreserve nach 25 Jahren wendet man die Gleichung

$$ {}_sV_x = A_s - P_x \frac{{}^a\mathbb{N}_{x+s}^{(12)} - {}^a\mathbb{N}_{x+m+n}^{(12)}}{{}^aD_{x+s}} $$

an und erhält, da sich A_s aus den auf Seite 245, 251 und 254 berechneten Werten $X_{55} = K\ 28.519{\cdot}48$, $Y_{55} = K\ 12.252{\cdot}76$ und $Z_{55} = K\ 502{\cdot}52$ zusammensetzt, mithin einen Wert von K 41.274·76 hat, nach Tafel XIV

$$ {}_{25}V_{30} = 41{\cdot}274{\cdot}76 - 1003{\cdot}64 \, \frac{50479{\cdot}2 - 8616{\cdot}0}{6681{\cdot}3} = 34.986{\cdot}23. $$

Nach 25 Jahren beträgt mithin die Prämienreserve K 34.986·23.

4. Bilanz und Rechnungslegung eines Pensionsinstitutes.

§ 94. *Einnahmen und Ausgaben. Aktiva und Passiva.*

Jedes Pensionsinstitut (Pensionsanstalt, Ersatzinstitut) ist nach dem Pensionsversicherungsgesetze vom 16. Dezember 1906 verpflichtet regelmäßig einen jährlichen Rechnungsabschluß zu bilden, der

1. aus der Betriebsrechnung (Gewinn- und Verlustkonto) und

2. aus der Bilanz

zu bestehen hat.

Dieser Bestimmung unterliegt auch jeder Dienstgeber, dessen Dienstvertrag als Ersatzvertrag im Sinne des obzitierten Gesetzes anerkannt wird.

Der Rechnungsabschluß hat nach den von der Aufsichtsbehörde genau bestimmten Formularen zu erfolgen, die dem Wesen nach den für die privaten Versicherungsgesellschaften geltenden Formularen größtenteils entsprechen.

Hiebei ist zu bemerken, daß nach der Vollzugsvorschrift zum Pensionsversicherungsgesetze die Realitäten nicht mit einem höheren als ihrem Verkehrswerte und höchstens mit einem solchen Werte zu Buche stehen sollen, daß das Reinerträgnis derselben mindestens jene Verzinsung bietet, welche dem der Berechnung der Prämienreserve zugrunde liegenden Zinsfuße entspricht. Insofern der Buchwert der Realitäten diesem Grundsatze nicht entspricht, ist für die entsprechende Bewertung der Realitäten durch regelmäßige Abschreibungen vorzusorgen.

Ferner haben die Ersatzinstitute bei Vorlage der technischen Fondsprüfungen (versicherungstechnischen Bilanzen), die nach Ablauf von je 5 Jahren vorgenommen werden müssen, auch alle zur Überprüfung erforderlichen Behelfe und Detailrechnungen beizubringen.

Diese findet auch auf jene Dienstgeber Anwendung, deren Verpflichtungen gegenüber den Versicherten durch einen von dem Dienstgeber ganz oder teilweise erhaltenen, nicht selbständig bestehenden Fonds gesichert sind.

Aufgaben-Sammlung.

Aufgaben-Sammlung.

I. Zinseszins- und Zeitrentenrechnung bei dekursiver und antizipativer Verzinsung.

1. Zu welchem Werte wächst ein Kapital von *K* 5.650·— in 15 Jahren an, wenn $4\frac{1}{2}$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

2. Welchen Wert wird ein Kapital von *K* 4.240·— nach 9 Jahren haben, wenn es zu 5 (6) Prozent auf Zinseszinsen angelegt ist?

3. Zu welchem Werte wächst ein Kapital von *K* 75.825·— bei 4prozentiger Verzinsung in 8 Jahren an?

4. Welchen Barwert hat ein Kapital, welches, zu $3\frac{1}{2}$ Prozent auf Zinseszinsen angelegt, in 15 Jahren auf *K* 5.968·91 anwächst?

5. Welches Kapital wächst, zu 4 Prozent auf Zinseszinsen angelegt, in 15 Jahren auf *K* 15.368·— an?

6. Welchen gegenwärtigen Wert hat ein Kapital, welches bei $4\frac{1}{2}$prozentiger Verzinsung in 14 Jahren auf *K* 45.300·— anwächst?

7. Wie groß ist der Barwert eines nach 20 Jahren fälligen Kapitals von *K* 28.450·—, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

8. Ein Kapital von *K* 20.000·— ist in 16 Jahren durch Zinseszinsen auf *K* 34.679·72 angewachsen. Zu welchem Prozentsatze war es angelegt?

9. Zu wie viel Prozent muß ein Kapital von *K* 45.000·— auf Zinseszinsen angelegt werden, damit es sich in 17 Jahren verdoppelt?

10. Zu welchem Prozentsatze muß ein Kapital auf Zinseszinsen angelegt werden, damit es sich in 29 Jahren verdreifacht?

11. Nach wie viel Jahren wächst ein zu 4 Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von *K* 2.500·— auf *K* 5.696·92 an?

12. Ein Wohltäter vermacht einer Gemeinde *K* 60.000·— mit der Bedingung, daß dieses Kapital so lange auf Zinseszinsen angelegt bleibt, bis es den Betrag von *K* 100.000·— erreicht hat, um dann die daraus sich ergebenden Zinsen jährlich an die Ortsarmen zu verteilen.

Wie lange muß die Gemeinde dieses Kapital auf Zinseszinsen anliegen lassen, wenn eine $3^1/_2$prozentige Verzinsung gerechnet wird?

13. Nach wie viel Jahren wird sich ein zu 4 Prozent ausgeliehenes Kapital: *a*, durch einfache Zinsen, *b*, durch Zinseszinsen verdoppeln?

14. Welchen Wert hat ein zu $3^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von *K* 15.384 — nach $10^3/_4$ Jahren?

15. Welches Kapital hat in 10 (8) Jahren, das auf Zinseszinsen angelegt ist, denselben Wert, wie ein Kapital von *K* 5.040·— zu $4^1/_2$ (3) Prozent in 8 (10) Jahren?

16. Ein zu $3^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von *K* 18.300·— wird 4 Jahre später durch ein mit 4 Prozent verzinstes Kapital von *K* 10.500·— vermehrt. Über welches Kapital wird man nach Ablauf von weiteren 10 Jahren verfügen können?

17. Wie groß ist der Gewinn, den eine Sparkasse bei *K* 100.000 — in 10 Jahren erzielt, wenn sie die eingelegten Kapitalien mit $3^1/_2$ Prozent, dagegen die ausgeliehenen mit $4^1/_2$ Prozent verzinst?

18. Von einer Schuld von *K* 25.000·— werden nach 3 Jahren *K* 10.000·— und 2 Jahre später *K* 12.000·— bezahlt. Wie groß ist noch die Schuld nach Ablauf dieser 5 Jahre, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

19. In wie viel Jahren wird sich ein Kapital verdreifachen, wenn es in der ersten Hälfte zu $3^1/_2$ Prozent, hingegen in der zweiten mit 4 Prozent auf Zinseszinsen ausgeliehen ist?

20. *A* bietet für ein Haus *K* 200.000·— bar, *B* eine nach 3 Jahren zahlbare Summe von *K* 229.000·— und *C* eine nach 5 Jahre zahlbare Summe von *K* 249.000·—. Welches Anbot ist für den Verkäufer das günstigste, wenn $4^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

21. Zu wie viel Prozent muß ein Kapital auf Zinseszinsen angelegt werden, damit es nach 10 Jahren jenen Wert erreicht, daß ihm nur noch der Betrag des Anfangskapitals fehlt, um das Doppelte des Betrages zu erhalten, den es bereits nach 5 Jahren erlangt hatte?

22. Zu welchem Werte wächst bei halbjähriger Verzinsung ein zu 4 (5, 6) Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von *K* 12.560·— in 12 Jahren an?

23. Zu welchem wirklichen Prozentsatze muß ein Kapital von *K* 35.782·— auf Zinseszinsen angelegt werden, damit es nach 8 Jahren um *K* 252·28 kleiner ist als der Endwert desselben Kapitals bei halbjähriger Verzinsung zu 5 Prozent (nomineller Prozentsatz) nach 8 Jahren?

24. Ein Kapital von *K* 25.000·— ist zu $4^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen angelegt. Zu welchem Werte wird dieses Kapital in 30 Jahren anwachsen, wenn die Verwaltungskosten jährlich $^1/_4$ Prozent des jeweiligen Bestandes betragen und am Schlusse eines jeden Jahres in Abzug gebracht werden?

25. Eine Bank verzinst die Einlagen zu 4 Prozent, zieht aber jährlich $^1/_5$ Prozent vom jeweiligen Bestande an Verwaltungskosten ab. Zu welcher Summe wächst eine Einlage von *K* 17.340·— in 15 Jahren an und welches ist der durchschnittliche jährliche Zinsenertrag?

26. Welches Kapital wächst bei halbjähriger Kapitalisierung in 12 Jahren zu *K* 12.000·— an, wenn bei nominellem Zinsfuße von 5 Prozent am Schlusse eines jeden Halbjahres (Semesters) $^1/_{10}$ Prozent des jeweiligen Bestandes an Verwaltungsgebühren abgezogen werden?

27. In wie viel Jahren wächst ein zu 4 Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von *K* 8.000·— auf *K* 15.000·— an, wenn am Schlusse eines jeden Jahres $^1/_4$ Prozent des jeweiligen Bestandes an Verwaltungskosten abgezogen werden?

28. Wie viel Prozent werden für Verwaltungsgebühren am Schlusse eines jeden Jahres abgezogen, wenn sich ein zu $4^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital in 18 Jahren verdoppelt?

29. Ein Kapital von *K* 20 000·—, von welchem am Schlusse jedes Jahres $^1/_4$ Prozent an Verwaltungsgebühren abgezogen wurden, ist in 20 Jahren zu *K* 41.682·58 angewachsen. Welcher Zinsfuß ist der Berechnung zugrunde gelegt worden?

30. *A* gibt dem *B* für einen nach 6 Monaten fälligen Wechsel über *K* 3.400·— als Bezahlung zwei, nach 8, beziehungsweise 4 Monaten fällige Wechsel, von denen der nach 8 Monaten fällige Wechsel über *K* 2.600·— lautet. Über welchen Betrag ist der zweite Wechsel ausgestellt, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

31. In welchem Verhältnisse steht der Diskonto eines nach 3 Jahren zahlbaren Kapitals *k* zum Barwerte eines durch 3 Jahre am Schlusse eines jeden Jahres in gleicher Höhe zahlbaren Betrages *k*, wenn *p* Prozent Zinseszinsen zugrunde gelegt werden?

Antwort:

$$k(1-v^3):kv(1+v+v^2)=i:1.$$

32. Jemand ist verpflichtet nach 5 Jahren *K* 5.000·—, nach 8 Jahren *K* 8.000·— und nach 11 Jahren *K* 11.000·— zu zahlen. Durch welche heute zu entrichtende einmalige Zahlung kann er diese Verpflichtung ablösen, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

33. Wann könnte er die ganze Summe in dem vorstehenden Beispiele ohne Gewinn und Verlust an Zinsen auf einmal zahlen?

34. Jemand hat 8 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres *K* 5.300·— zu zahlen. Welchen Betrag müßte er dafür nach 4 Jahren zahlen, wenn $4^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

35. Eine 30jährige Person versicherte ihr Leben mit *K* 20.000·—,

wofür sie jährlich K 409·57 zu zahlen hatte. Sie starb im Alter von 60 Jahren. Welches war der Gewinn oder Verlust der Versicherungsanstalt, wenn $3^1/_2$ Prozent Zinseszinsen zugrunde gelegt werden?

36. Jemand legt durch 10 Jahre am Schlusse jedes Jahres K 1.500·— und dann durch weitere 8 Jahre ebenfalls am Schlusse eines jeden Jahres K 750·— in eine Sparkasse ein. Über welche Summe wird er nach Ablauf von 18 Jahren verfügen können, wenn die Sparkasse die Einlagen halbjährig zum nominellen Zinsfuße von 4 Prozent verzinst?

37. Zwei 30jährige Beamte A und B haben ein Gehalt von je K 2.500·—. Wie viel hat, wenn A alle 4 Jahre, B dagegen alle 5 Jahre eine Zulage von K 500·— erhält, A nach 25 Jahren im ganzen mehr erhalten, falls 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet und die Gehälter am Schlusse eines jeden Jahres ausbezahlt werden?

38. Ein zu p Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von K Kronen wird alljährlich am Schlusse (Anfange) eines jeden Jahres um k Kronen vermehrt (vermindert). Welches ist der Gesamtwert nach n Jahren, wenn

a) $p = 3^1/_2$, $K = K$ 24.856·—, $k = K$ 2.500·— und $n = 10$,
b) $p = 4^1/_2$, $K = K$ 17.560·—, $k = K$ 580·— „ $n = 16$,
c) $p = 5$, $K = K$ 19.138·—, $k = K$ 1.200·— „ $n = 8$
und *d)* $p = 6$, $K = K$ 15.872·—, $k = K$ 928·— „ $n = 12$ ist?

39. Jemand macht bei einer Sparkasse eine Einlage von K 8.345·— und vermehrt sie durch einzelne am Ende jedes zweiten Jahres erfolgende Zuzahlungen von je K 400·—. Zu welchem Endwerte sind alle Einlagen nach 17 Jahren angewachsen, wenn $3^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

40. Ein Knabe bekam bei seiner Geburt als Geschenk K 6.000·—, die zu 4 Prozent auf Zinseszinsen angelegt wurden. Vom Anfange des 19. Lebensjahres entnahm man zu seiner höheren Ausbildung durch 5 Jahre alljährlich dem Kapital vorschüssig K 1.000·—. Wie viel besaß er noch am Schlusse des 23. Lebensjahres?

---

41. Jemand will am Ende jedes Jahres so viel zurücklegen, daß er nach 13 Einlagen ein Vermögen von K 8.000·— hat. Wie groß wird bei einer 4prozentigen Verzinsung eine solche Einlage sein?

42. Jemand erlegt an seinem 32. Geburtstage in einer Sparkasse K 1.000·— und will außerdem noch am Schlusse eines jeden Jahres so viel hinzufügen, daß er an seinem 60. Geburtstage K 12.000·— besitzt. Wie groß ist die jährliche Einlage, wenn $3^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

43. Ein Kapital von K 15.000·— soll so auf Zinseszinsen angelegt werden, daß es sich in 18 Jahren verdoppeln würde. Es werden ihm aber am Schlusse eines jeden Jahres K 800·— entnommen. Wie viel bleibt am Ende des 18. Jahres vom Kapital noch übrig?

44. Von einer Stiftung, die K 50.000·— beträgt und zu 4 Prozent auf Zinseszinsen angelegt ist, werden immer am Schluß eines jeden Jahres in den ersten 6 Jahren K 4.500·—, in den nächsten 6 Jahren K 3.500·— ausgezahlt. Welchen Endwert hat das Kapital nach diesen 12 Jahren?

45. Eine Schuld von K 25.000·— soll bei einer $3^1/_2$prozentigen Verzinsung derart getilgt werden, daß am Schlusse eines jeden Jahres 6 Prozent der Anfangsschuld bezahlt werden. Nach wie viel Jahren wird die Schuld getilgt?

46. Jemand vermehrt ein zu $3^1/_2$ Prozent auf Zinseszinsen angelegtes Kapital am Anfange (Schlusse) eines jeden Jahres um den sechsten Teil seines ursprünglichen Wertes. Nach wie viel Jahren hat sich sein Kapital verdreifacht?

47. Eine Schuld soll in den ersten 8 Jahren mit $3^1/_2$ Prozent und von da ab, mit $4^1/_2$ Prozent verzinst werden. In wie viel Jahren ist die ganze Schuld abgetragen, wenn 8 Prozent der anfänglichen Schuld zur Zinsenzahlung und allmählichen Tilgung verwendet werden?

---

48. Wie groß ist der Barwert einer Rente von K 3.000·—, die durch 15 Jahre am Anfange (Schlusse) jedes Jahres ausgezahlt wird, wenn $3^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

49. Eine durch n Jahre fällige Postnumerando- (Pränumerando-) Rente von K R soll in eine andere umgewandelt werden, die durch m Jahre am Ende (Anfange) jedes Jahres fällig ist. Wie groß wird die neue Rente sein, wenn p Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

Beispiele:

a) $R = K$ 2.000·—, $n = 18$, $m = 20$ und $p = 4$,
b) $R = K$ 3.000·—, $n = 16$, $m = 12$ „ $p = 3^1/_2$,
c) $R = K$ 1.800·—, $n = 14$, $m = 10$ „ $p = 4^1/_2$.

50. Eine Rente von K R, die durch n Jahre am Ende (Anfange) eines jeden Jahres fällig ist, soll in eine andere umgewandelt werden, die durch m Jahre am Ende (Anfange) eines jeden Halbjahres zahlbar ist. Wie groß wird die neue Rente sein, wenn p Prozent Zinseszinsen gerechnet werden und wenn:

a) $R = K$ 1.600·—, $n = 20$, $m = 12$ und $p = 5$,
b) $R = K$ 2.500·—, $n = 18$, $m = 8$ „ $p = 4$,
c) $R = K$ 3.000·—, $n = 15$, $m = 9$ „ $p = 6$ ist?

51. Eine durch 15 Jahre am Anfange eines jeden Jahres zahlbare Rente von K 2·500·— soll in eine andere verwandelt werden, die durch

10 Jahre immer am Schlusse eines jeden Jahres zur Auszahlung gelangt. Wie groß ist die neue Rente, wenn die Zinseszinsen mit $3^1/_2$ Prozent gerechnet werden?

52. Jemand verzichtet auf eine 20 Jahre dauernde Pränumerando-(Postnumerando-) Rente von *K* 3.000·—, wenn ihm nach 10 Jahren ein Kapital von *K* 8.000·— ausgezahlt und von derselben Zeit an eine Postnumerando- (Pränumerando-) Rente auf die Dauer von 10 Jahren sichergestellt wird. Wie groß wird die Rente sein, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

53. Jemand legt ein gewisses Kapital auf Zinseszinsen an und fügt am Ende jedes Jahres *K* 1.000·— hinzu. Nach Ablauf von 8 Jahren hatte das Kapital eine solche Höhe erreicht, daß davon 8 Jahre hindurch eine Rente von *K* 5.000·— bezahlt werden konnte. Wie groß war das Anfangskapital, wenn $4^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

54. Jemand kauft eine Pränumerando-Rente von *K* 1.000·— für *K* 8.435·33. Wie lange wird ihm dieselbe ausbezahlt, wenn die Zinseszinsen mit 4 Prozent gerechnet werden?

55. Wie lange muß ein Kapital von *K* 30.000·— auf Zinseszinsen stehen, damit es dann, wenn man die Zinseszinsen mit $4^1/_2$ Prozent rechnet, durch 10 Jahre eine Postnumerando-Rente von *K* 4.000·— gibt?

56. Bei der Geburt eines Kindes wurden *K* 8.000·— zu 4 Prozent auf Zinseszinsen angelegt, um ihm dadurch eine nach 25 Jahren beginnende und durch 10 Jahre laufende Rente zu sichern. Wie groß wird diese Rente sein?

57. Jemand kauft ein Gut, auf welchem die Verpflichtung lastet, daß alle 3 Jahre zur Erhaltung einer Landstraße ein Beitrag von *K* 5.000·— geleistet werden muß. Wie groß ist die Ablösungssumme, wenn der Kauf gleich nach Zahlung eines solchen Beitrages vollzogen wird und 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

58. Auf einem Besitze ruht die immerwährende Verpflichtung am Schlusse jedes Jahres *K* 1.000·— abzugeben. Welche jährliche Abzahlung wäre erforderlich, um diese Verpflichtung in 25 Jahren abzulösen, wenn die Zinseszinsen mit $4^1/_2$ Prozent gerechnet werden?

59. Die Verpflichtung, immer am Schlusse eines jeden Jahres *K* 2.500·— zu zahlen, soll abgelöst werden. Wie groß wird die Ablösungssumme sein, wenn die erste Zahlung erst nach 8 Jahren beginnen soll und wenn die Zinseszinsen mit 4 Prozent gerechnet werden?

60. Jemand will eine erst nach 10 Jahren beginnende ewige Rente von *K* 3.800·— kaufen. Wie viel wird er dafür zahlen, wenn 4 Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

61. Wie lange muß man auf den Genuß einer pränumerando zahl-

baren ewigen Rente von *K* 3.000·— verzichten, wenn man sie um *K* 76.641·67 kauft und 3 Prozent Zinseszinsen rechnet?

62. Wie groß ist der Barwert einer mit *K* 3.400·— beginnenden Postnumerando-Rente, die 8mal jährlich um je *K* 200·— steigt, also im ganzen 9mal zur Auszahlung gelangt und wenn $4^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

63. Wie groß ist der Barwert einer um 8 Jahre aufgeschobenen, mit *K* 3.000·— beginnenden und 10mal um je *K* 150·— steigenden (fallenden) jährlichen Rente, wenn man 4 Prozent Zinseszinsen rechnet?

64. Welchen Barwert hat eine 20 Jahre laufende Postnumerando-Rente, welche mit *K* 1.000·— beginnt und jährlich um 10 Prozent steigt, wenn $4^1/_2$ Prozent Zinseszinsen gerechnet werden?

---

65. Zu welchem Werte wachsen *K* 6.358·— bei $3^1/_2$prozentiger, antizipativer Verzinsung in 15 Jahren an?

66. Welchen Barwert hat ein nach 18 Jahren fälliges Kapital von *K* 37.978·55, wenn $3^1/_2$ Prozent antizipative Zinseszinsen gerechnet werden?

67. Zu wie viel Prozent muß ein Kapital angelegt werden, damit es sich bei einer antizipativen Verzinsung in 18 Jahren verdoppelt?

68. In wie viel Jahren erreicht ein Kapital von *K* 25.000·— bei 4prozentiger, antizipativer Verzinsung den Wert von *K* 46.118·11?

69. Jemand benötigt nach Ablauf von 5 Jahren durch weitere 5 Jahre am Anfange eines jeden Jahres je *K* 2.000·—. Wie viel müßte er dafür bei einer Bank erlegen, wenn dieselbe die Auszahlung der Beträge übernimmt und $3^1/_2$ Prozent antizipative Zinseszinsen rechnet?

70. In welcher Zeit hat ein Kapital bei $4^1/_2$prozentiger, antizipativer Verzinsung denselben Endwert wie bei 5prozentiger, dekursiver Verzinsung in 12 Jahren?

71. Wie groß ist der wirkliche Prozentsatz, wenn das Kapital halbjährig (monatlich) mit dem nominellen Zinsfuße von 5 Prozent antizipativ verzinst wird?

72. Zum Baue einer Zweigbahn braucht man 5mal à *K* 1,000.000·—, welchen Betrag sich eine Bank immer am Anfange eines jeden Jahres auszuzahlen verpflichtet. Wie viel muß ihr zu Beginn des Baues übergeben werden, wenn $3^1/_2$prozentige, antizipative Zinseszinsen gerechnet werden?

73. Auf einem Gut lastet die Verpflichtung am Schlusse eines jeden Jahres einen Straßenbeitrag von *K* 2.000·— zu zahlen. Wie groß ist die Ablösungssumme, wenn 4prozentige, antizipative Zinseszinsen gerechnet werden?

74. Beweise: $\frac{1}{a_{\overline{n}|}} - \frac{1}{1 + s_{\overline{n-1}|}} = i.$

2. Tilgungspläne bei dekursiver und antizipativer Verzinsung.

1. Jemand will eine Schuld von K 60.000·— in 6 Jahren abtragen. Wie groß ist die Annuität, die er am Schlusse jedes Jahres zu zahlen hat und wie lautet der Tilgungsplan, wenn die dekursiven Zinsen zu 4 Prozent gerechnet werden?

2. Eine Stadt macht eine Anleihe von K 10,000.000·— nnd will dieselbe durch 40 gleich große, am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annnitäten tilgen. Wie viel wird in den ersten 6 Jahren jedesmal an Kapital nnd wie viel an Zinsen zurückgezahlt, wenn 4 Prozent dekursive Zinseszinsen gerechnet werden?

3. Jemand hat eine Schuld von K 9.500·— gemacht, welche er in 4 Jahren bei 6prozentiger, dekursiver Verzinsung tilgen will. Wie viel muß halbjährig auf Zahlung der Zinsen und Tilgung der Schuld verwendet werden und wie lautet der Tilgungsplan?

4. Ein Anlehen von K 2,000.000·— soll in 45 Jahren durch Zahlung gleich großer Annuitäten getilgt werden. Wie groß ist bei 4prozentiger, dekursiver Verzinsung die Schuld am Anfange des 20. und 40. Jahres und wie lautet der Tilgungsplan der letzten 6 Jahre?

5. Wie groß ist zu dem vorstehenden Beispiele der Betrag, den man unmittelbar nach der 29. Annuitätenzahlung erlegen muß, um den ganzen Schuldrest auf einmal zu bezahlen?

6. Nach wie viel Jahren kann eine Schuld von K 2,000.000·— bei $4^1/_2$prozentiger, dekursiver Verzinsung getilgt werden, wenn die Annuität K 122.783·08 beträgt?

7. Wie lautet zu dem vorstehenden Beispiele der Tilgungsplan der letzten 4 Jahre?

8. Eine Schuld von K 15.000·— soll bei 6prozentiger, dekursiver Verzinsung durch eine Annuität getilgt werden, die 20 Prozent der aufgenommenen Schuld beträgt. In wie viel Jahren kann die Schuld getilgt werden und wie lautet der Tilgungsplan der letzten 2 Jahre?

9. Eine Anleihe von K 4,000.000·—, welche in Obligationen à K 100·— ausgegeben wird, soll in 6 Jahren bei $4^1/_2$prozentiger, dekursiver Verzinsung amortisiert werden. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan, wenn die ausgelosten Obligationen zum Nennwerte eingelöst werden?

10. Wie groß ist die Annnität und wie lautet der Tilgungsplan, wenn die ausgelosten Obligationen im vorstehenden Beispiele mit K 110·— eingelöst werden?

11. Ein Anlehen von K 5,000.000·—, welches in Obligationen

à K 500·— geteilt ist, soll in 40 Jahren bei $4^1/_2$prozentiger, dekursiver Verzinsung und Einlösung der Obligationen zum Nennwerte getilgt werden. Wie lautet der Tilgungsplan der letzten 5 Jahre?

12. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan der letzten 5 Jahre, wenn die ausgelosten Obligationen im vorstehenden Beispiele mit K 525·— eingelöst werden?

13. Ein Anlehen von K 1,000.000·—, welches in 5000 Obligationen à K 100·— und in 2500 Obligationen à K 200·— geteilt ist, soll in 35 Jahren bei 5prozentiger, dekursiver Verzinsung getilgt werden. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan der letzten 5 Jahre, wenn die ausgelosten Obligationen zum Nennwerte eingelöst werden?

14. Wie viel Prozent des ursprünglichen Kapitals k müssen für die Annuität verwendet werden, wenn das Kapital bei p-prozentiger, dekursiver Verzinsung in n Jahren getilgt werden soll? Wie lautet der Tilgungsplan der letzten m Jahre?

Beispiele:

a) $k = K$ 8.000·—, $p = 4$, $n = 4$ und $m = 2$,
b) $k = K$ 800.000·—, $p = 5$, $n = 34$ „ $m = 4$,
c) $k = K$ 10.000·—, $p = 6$, $n = 6$ „ $m = 3$.

15. Eine Schuld von K 80.000·— wird bei 4prozentiger, deknrsiver Verzinsung mit 40 Prozent der aufgenommenen Schuld, d. i. mit K 32.000·— amortisiert. In wie viel Jahren wird die Schuld getilgt und wie lautet der Tilgungsplan der ersten 2 Jahre?

16. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan der ersten 4 Jahre, wenn im vorstehenden Beispiele die Amortisation mit 14 Prozent der jeweilig vorhandenen Schuld erfolgt?

17. Jemand nimmt ein Anlehen von K 25.000·— auf, das bei $4^1/_2$prozentiger, dekursiver Verzinsung durch eine Annnität von K 2.500·— getilgt wird. Nach 5 Jahren wird der Zinsfuß von $4^1/_2$ auf 4 Prozent herabgesetzt. Wie lautet der Tilgungsplan der letzten 2 Jahre?

18. Eine Stadt macht eine aus Obligationen à K 100·— bestehende Anleihe von K 20,000.000·—, welche durch eine am Schlusse eines jeden Halbjahres zahlbare Annuität in 25 Jahren getilgt werden soll. Wie lautet der Tilgungsplan der letzten 2 Jahre, wenn die halbjährlich ausgelosten Obligationen zum Nennwerte eingelöst und die dekursiven Zinseszinsen mit 5 Prozent ganzjährig gerechnet werden?

---

19. Eine Schuld von K 6.000·— soll in 5 Jahren bei 4prozentiger, antizipativer Verzinsung getilgt werden. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan?

20. Jemand macht eine Anleihe von K 350.000·— und will dieselbe durch 30 gleich große, am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuitäten tilgen. Wie lautet der Tilgungsplan der ersten und wie der letzten 3 Jahre, wenn die antizipativen Zinseszinsen mit 4 Prozent gerechnet werden?

21. Eine Schuld von K 5.000·— soll in 4 Jahren bei 6prozentiger, antizipativer Verzinsung getilgt werden. Wie viel muß halbjährig auf Zahlung der Zinsen und Tilgung der Schuld verwendet werden und wie lautet dazu der Tilgungsplan?

22. Eine Gemeinde macht eine Schuld von K 600.000·— und verpflichtet sich dieselbe in 25 Jahren durch gleich große, am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuitäten zurückzuzahlen. Wie groß ist eine solche Annuität und wie lautet der Tilgungsplan der ersten 4 Jahre, wenn $3^1/_2$ Prozent antizipative Zinseszinsen gerechnet werden?

23. Wenn die Gemeinde im vorstehenden Beispiele zehn Annuitäten gezahlt hat und an Stelle der elften Annuität den ganzen Schuldrest auf einmal bezahlen will, wie viel hat sie dafür zu erlegen?

24. In wie viel Jahren wird eine Schuld von K 65.000·— bei $4^1/_2$prozentiger, antizipativer Verzinsung getilgt, wenn die Annuität K 4.278·12 beträgt?

25. Wie lautet der Tilgungsplan zu dem vorstehenden Beispiele für die letzten 4 Jahre?

26. Ein Anlehen von K 2,500.000·—, welches in Obligationen à K 200·— ausgegeben wird, soll in 32 Jahren bei 4prozentiger, antizipativer Verzinsung getilgt werden. Wie groß ist die Annuität und wie stellt sich der Tilgungsplan der ersten 4 Jahre, wenn die ausgelosten Obligationen zum Nennwerte eingelöst werden?

27. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan der letzten 4 Jahre, wenn die ausgelosten Obligationen im vorstehenden Beispiele mit K 210·— eingelöst werden?

28. Eine Anleihe von K 400.000·—, welche in Obligationen à K 400·— geteilt ist, soll in 5 Jahren bei 5prozentiger, antizipativer Verzinsung getilgt werden. Wie lautet der Tilgungsplan, wenn die ausgelosten Obligationen zum Nennwerte eingelöst werden?

29. Wie lautet der Tilgungsplan im vorstehenden Beispiele, wenn die Obligationen mit K 420·— eingelöst werden?

30. Ein Anlehen von K 30,000.000·—, welches in 75.000 Obligationen à K 100·— und in 75.000 Obligationen à K 200·— und in 7.500 Obligationen à K 1.000·— ausgegeben wird, soll in 45 Jahren bei $4^1/_2$prozentiger, antizipativer Verzinsung getilgt werden. Wie lautet der Tilgungsplan der letzten 4 Jahre, wenn die ausgelosten Obligationen zum Nennwerte eingelöst werden?

31. Wie lautet der Tilgungsplan der ersten 4 Jahre zu dem vorhergehenden Beispiele, wenn die ausgelosten Obligationen mit einem 5prozentigen Aufgelde, d. h. die Obligationen à K 100·— mit K 105·—, die à K 200·— mit K 210·— und die à K 1.000·— mit K 1.050·— eingelöst werden?

32. Eine Schuld von K 7.000·—, die zu 6 Prozent antizipativ verzinst wird, soll durch eine Annuität. die 12 Prozent der ursprünglichen Schuld beträgt, getilgt werden. In wie viel Jahren wird die ganze Schuld abgetragen und wie lautet der Tilgungsplan der ersten und der letzten 2 Jahre?

33. In wie viel Jahren wird ein Anlehen von K 300.000·—, das mit 4 Prozent antizipativ verzinst wird, durch eine jährliche Annuität von K 25.000·— getilgt und wie groß ist der Schuldrest zu Beginn des letzten Jahres?

34. Wie lautet zu dem vorstehenden Beispiel der Tilgungsplan der ersten und der letzten 2 Jahre?

35. Ein Anlehen von K 4,000.000·—, das bei antizipativer Verzinsung zu 4 Prozent aufgenommen wurde, soll durch jährliche Abzahlungen von K 200.000·— getilgt werden. Nach Verlauf von 20 Jahren wird festgesetzt, daß weiterhin alljährlich K 250.000·— abgezahlt werden sollen. Um wie viel verkürzt sich hiedurch die Tilgungsfrist?

36. Zur Tilgung einer Schuld von K 500.000·— werden jährlich K 30.000·— verwendet. Nach welcher Zeit wird die Schuld getilgt, wenn der antizipative Zinsfuß während der ersten 15 Jahre mit $4^1/_2$ Pozent, für die Restzeit aber mit 5 Prozent festgesetzt wird?

37. Wie lautet der Tilgungsplan zu dem vorstehenden Beispiele für die ersten und letzten 2 Jahre?

38. Ein Anlehen von K 3,000.000·—, welches aus 30.000 Obligationen à K 100·— besteht, soll durch eine am Schlusse eines jeden Halbjahres zahlbare Annuität in 24 Jahren getilgt werden. Wie groß ist die Annuität und wie lautet der Tilgungsplan des ersten und letzten Jahres, wenn 4prozentige, antizipative Zinsen gerechnet und die halbjährlich ausgelosten Obligationen zum Nennwerte eingelöst werden?

3. Tilgungspläne von Lotterieanlehen.

1. Ein aus 10.000 unverzinslichen Losen à K 100·— bestehendes Lotterieanlehen soll in 6 Jahren derart getilgt werden, daß in jedem Jahre 4 größere Treffer gezogen werden, die mit einem konstant bleibenden Betrage zu dotieren sind. Die übrigen Lose sollen durchwegs mit je K 106·— eingelöst werden. Wie lautet der Verlosungsplan, wenn das Anlehen mit 5 Prozent verzinst wird?

2. 40.000 unverzinsliche Lose à K 50·— sollen in 8 Ziehungen derart getilgt werden, daß in jeder Ziehung 8 größere Treffer gezogen werden, wofür eine konstant bleibende Summe zu verwenden wäre. Die übrigen Lose sollen in der ersten Ziehung mit je K 52·—, in der zweiten mit je K 54·—, in der dritten mit je K 56·— usw. ...... eingelöst werden. Wie stellt sich der Verlosungsplan, wenn dem Anlehen 5 Prozent Zinseszinsen zugrunde gelegt werden?

3. Ein aus 60.000 unverzinslichen Losen à K 150·— bestehendes Prämienanlehen soll in 6 Jahren derart getilgt werden, daß von den 5 größeren Gewinsten 1 Treffer mit K 10.000·—, ferner 1 Treffer mit K 8.000·— und 1 Treffer mit K 5.000·—, während die übrigen 2 Treffer mit je K 1.000·— dotiert werden. Die restlichen Lose sollen im ersten Jahre mit je K 160·—, im zweiten mit je K 170·—, im dritten mit je K 180·—, usw. ...... eingelöst werden. Wie lautet für dieses Prämienanlehen der Verlosungsplan?

4. Ein aus 100.000 unverzinslichen Losen à K 100·— bestehendes Lotterieanlehen soll in 45 Jahren getilgt werden. Der für die jährlich gezogenen 8 größeren Treffer verwendete Betrag soll durch 35 Jahre konstant bleiben und in den folgenden 10 Jahren jährlich um K 1.000·— abnehmen. Die übrigen Lose werden zum Nennwerte eingelöst. Wie groß ist der auf die größeren Gewinste entfallende Betrag und wie lautet der Verlosungsplan für die ersten und letzten 3 Jahre, wenn das Anlehen mit 5 Prozent verzinst wird?

5. Wie groß ist der auf die größeren Gewinste entfallende Betrag und wie lautet der Tilgungsplan für die ersten 4 Jahre, wenn die übrigen Lose des vorstehenden Beispieles im ersten Jahre mit je K 102·—, im zweiten mit je K 104·—, im dritten mit je K 106·— usw. ..... eingelöst werden?

6. Ein Anlehen, welches aus 50.000 Losen à K 500·— besteht, soll in 30 Ziehungen getilgt werden. Der Betrag, welcher auf die 8 größeren Treffer entfällt, soll durch alle Ziehungen konstant bleiben, während die übrigen Lose zum Nennwerte eingelöst werden. Wie lautet der Verlosungsplan der ersten und letzten 3 Jahre, wenn das Anlehen mit $4^1/_2$ Prozent und die Lose bis zu ihrem Verlosungstage mit $3^1/_2$ Prozent verzinst werden?

7. Ein aus 100.000 Losen à K 200·— bestehendes Lotterieanlehen soll in 8 Jahren derart getilgt werden, daß die Lose bis zu ihrem Verlosungstage mit 3 Prozent verzinst werden. In jedem Jahre sollen 6 größere Treffer gezogen werden, und zwar 1 Treffer mit K 30.000·—, 1 Treffer mit K 18.000·—, 1 Treffer mit K 8.000·— und die weiteren 3 Treffer mit je K 5.000·—. Die übrigen Lose sollen zum Nennwerte eingelöst werden. Wie lautet für dieses Anlehen der Verlosungsplan?

4. Kurse und Konvertierungen von Anlehen.

1. Eine Anleihe, welche mit $4^1/_2$ Prozent verzinst wird, soll durch 40 gleich große Jahreszahlungen getilgt werden. Ein Kapitalist will sie mit 5 Prozent verzinst übernehmen. Zu welchem Kurse wird die Anleihe angeboten?

2. Eine Anleihe im Nominalwerte von K 10,000.000·— soll, zu 4 Prozent verzinst, in 25 Jahren dnrch eine am Schlusse eines jeden Jahres zahlbare Annuität so getilgt werden, daß dem Geldgeber sein Geld mit 5 Prozent verzinst wird. Wie groß ist der Effektivwert und der Kurs dieser Anleihe?

3. Wie groß ist der Effektivwert und der Kurs der Anleihe in dem vorstehenden Beispiele, wenn die Annuität am Schlusse eines jeden Halbjahres gezahlt wird und die Zinseszinsen zum nominellen Zinsfuße von 4, beziehungsweise 5 Prozent gerechnet werden?

4. Ein Anlehen von K 4,000.000·—, welches aus Obligationen à K 100·— besteht, soll bei 4prozentiger Verzinsung in 40 Jahren durch eine konstante am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuität getilgt werden. Zu welchem Kurse muß das Anlehen begeben werden, wenn der Geldgeber sein Geld mit $4^1/_2$ Prozent verzinst haben will und wenn die Obligationen zum Nennwerte eingelöst werden?

5. Wie groß ist der Kurs im vorstehenden Beispiele, wenn die Obligationen statt mit K 100·— mit K 105·— eingelöst werden?

6. Bei der Begebung eines Anlehens von K 8,000.000·—, welches durch 42 gleiche und am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuitäten getilgt werden soll, erbot sich eine Bank den Kurs bei einer 4prozentigen Verzinsung auf 98·5 festzusetzen, während eine zweite Bank bei einer $3^1/_2$prozentigen Verzinsung einen Kurs von 95·4 anbot. Welches Anerbieten war das vorteilhaftere?

7. Ein Anlehen soll in 45 Jahren durch gleiche, jährliche Zahlungen amortisiert werden. Das Bankhaus A will es zum Kurse 96·4 und zu 4 Prozent, das Bankhaus B zum Kurse 98·2 und zu $4^1/_2$ Prozent übernehmen. Welches Anerbieten ist vorteilhafter?

8. Eine Anleihe soll in 45 Jahren derart getilgt werden, daß am Schlusse eines jeden Jahres der 45. Teil der Anleihe samt den 4prozentigen Zinsen als Annuität gezahlt werden soll. Wie hoch stellt sich der Kurs dieser Anleihe, wenn der Gläubiger $4^1/_2$ Prozent rechnet?

9. Wie hoch würde sich der Kurs der im vorstehenden Beispiele angeführten Anleihe stellen, wenn der Gläubiger 5 Prozent rechnen würde?

10. Ein Staat macht eine Anleihe in 4·2prozentiger, ewiger Rente.

Zu welchem Kurse muß dieselbe emittiert werden, wenn der Staat die Anleihe mit $4^1/_2$ Prozent begeben will?

11. Ein noch aus 25.000 Obligationen à K 500·— bestehendes und bei 5prozentiger Verzinsung in 25 Jahren zurückzahlbares Anlehen soll in ein 4prozentiges, aus 62.500 Obligationen à K 200·— bestehendes und in 30 Jahren rückzahlbares Anlehen umgewandelt werden. Wie viel alte Obligationen können gegen neue umgetauscht werden, wenn der Umwandlungszinsfuß $4^1/_2$ Prozent beträgt?

12. Wie viel alte Obligationen können gegen neue umgetauscht werden, wenn das im vorstehenden Beispiele angeführte neue Anlehen in 25 Jahren getilgt werden soll?

13. Ein $4^1/_2$prozentiges Anlehen, das durch gleich große, am Schlusse eines jeden Jahres zahlbare Annuitäten in 40 Jahren getilgt wird, soll in ein 4prozentiges Anlehen von gleichem Nennwerte und gleicher Tilgungszeit umgewandelt werden. Wie viel alte Obligationen können gegen neue umgetauscht werden?

14. Wie viele Silberrenten à K 1.000·— mit einer Rentabilität von 5 Prozent können gegen Kronenrenten à K 200·— umgetauscht werden, wenn letztere eine $4^1/_2$prozentige Rentabilität haben?

15. Ein 5prozentiges, aus Obligationen à K 500·— bestehendes Anlehen, das durch gleich große, am Schlusse eines jeden Jahres zahlbare Annuitäten in 28 Jahren getilgt wird, soll in eine $4^1/_2$prozentige, ewige Rente à K 100·— umgewandelt werden. Wie viele Obligationen können gegen Renten umgetauscht werden, wenn der Umwandlungszinsfuß $3^1/_2$ Prozent beträgt?

5. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel auf einen Wurf: *a)* die Zahl 5, *b)* nicht die Zahl 5 zu werfen?

2. Aus einem Spiel von 52 Karten werden blindlings 2 Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit: *a)* nur rote, *b)* eine rote und eine schwarze, *c)* kein Bild und *d)* 2 Herzkarten zu ziehen?

3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Herausnehmen von 3 Karten aus einem Spiel von 52 Karten: *a)* nur Bilder, *b)* nur schwarze Karten und *c)* nur Buben zu ziehen?

4. Eine Urne enthält mehrere gleich große und gleich schwere Kugeln, und zwar 4 weiße, 5 rote, 6 gelbe und 7 blaue; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit: *a)* eine weiße, *b)* eine rote, *c)* eine gelbe, *d)* eine blaue, *e)* eine gefärbte, *f)* keine gelbe und *g)* keine gefärbte Kugel zu ziehen?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln auf einen Wurf zu werfen: *a)* die Summe 8, *b)* die Summe 9, *c)* einen Pasch, d. i. 11, 22, 33 usw., *d)* zur Summe eine ungerade Zahl und *e)* zur Summe eine gerade Zahl?

6. Zur Verlosung eines Bildes wurden 90 Lose ausgegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Bild mit einem Lose und wie groß mit 5 Losen zu gewinnen?

7. Von einem Prämienanlehen, das aus 20.000 Obligationen besteht, werden jährlich 600 Obligationen, darunter 10 mit Prämien ausgelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Obligation bei der ersten Ziehung: *a)* mit Prämie und *b)* überhaupt gezogen wird?

8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eher 4 als 3 zu werfen?

9. Welche Wahrscheinlichkeit besteht mit zwei Würfeln, eher die Summe 8 als 7 zu werfen?

10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Kartenspiel von 52 Blättern eher eine schwarze Karte als eine rote zu ziehen?

11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln dreimal hintereinander die Summe 7 zu werfen?

12. Man hat zwei Kartenspiele zu 52 Blättern; aus jedem derselben wird eine Karte gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man einen Buben und eine Dame zieht?

13. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel in drei Würfen die Nummer 5 wenigstens einmal zu werfen?

14. Von einer Lotterie von 90 Losen, in der 5 Treffer gezogen werden, hat A 1 Los, B dagegen 3 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide gewinnen, daß A allein gewinnt, daß entweder A oder B gewinnt, daß mindestens einer gewinnt und daß keiner von beiden gewinnt?

15. Wenn mit einem Wurf eines Würfels K 15·— zu gewinnen sind, falls die Nummer 4 geworfen wird, wie groß ist in diesem Falle die mathematische Erwartung?

16. Wie hoch kann der Einsatz sein, wenn man beim Spiel mit zwei Würfeln, für die Summe 7 zu werfen, K 10·— gewinnt?

17. Bei der gewöhnlichen Lotterie wird für das Terno der 4800fache Einsatz als Gewinn bezahlt; wie viel sollen für K 4·— an Gewinn entfallen und wie viel Prozent hat das Lotto dabei verdient?

18. Welchen wahren Wert hat ein Los von dem im Beispiele 1 sub Nr. 3 „Tilgungspläne vom Lotterieanlehen" angeführten Prämienanlehen unmittelbar vor der 4. und 6. Ziehung?

19. Wenn man ein Los des vorher erwähnten Anlehens zum Kurse von K 135·— erwirbt, wie viel wäre gegen Verlosungsverlust für die 5. Ziehung an Prämie zu entrichten?

20. Welches ist der mittlere Wert eines Loses des im Beispiele 4, Nr. 3 genannten Lotterieanlehens für die 30. und 31. Ziehung?

21. Wie groß ist der Wert einer Promesse auf das Anlehen im Beispiele 4, Nr. 3 für die 8. Ziehung?

22. Beweise:

$$a)\quad {}_np_x = p_x \cdot p_{x+1}\; p_{x+2} \cdots\cdots p_{x+n-1},$$
$$b)\quad l_{x+n} = {}_np_x (d_x + d_{x+1} + \cdots\cdots + d_\omega).$$

23. Gib aus der folgenden Sterblichkeitstafel für jedes Alter: *a)* die Lebenswahrscheinlichkeit, *b)* die Sterbenswahrscheinlichkeit, *c)* die mittlere Lebensdauer und *d)* die wahrscheinliche Lebensdauer an.

Alter	Anzahl der Lebenden	Alter	Anzahl der Lebenden
85	6359	94	310
86	5051	95	186
87	3929	96	107
88	2986	97	58
89	2213	98	30
90	1596	99	15
91	1116	100	7
92	756	101	3
93	493	102	1

24. Beweise:

$$1 + e_x = q_x + p_x (1 + q_{x+1}) + {}_2p_x (1 + q_{x+2}) + {}_3p_x (1 + q_{x+3}) + \cdots\cdots$$

25. Drücke p_x durch e_x aus und zeige, daß die mittlere Lebensdauer gleich ist

$$\frac{1}{2} (q_x + 3\,{}_1q_x + 5\,{}_2q_x + 7\,{}_3q_x + \cdots\cdots).$$

26. Nach einer Sterblichkeitstafel erreichen von 89.451 Personen, die 40 Jahre alt sind, 61.068 das 60. Lebensjahr und von 84.789 Personen, die 45 Jahre alt sind, erreichen 49.256 das 65. Lebensjahr. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach 20 Jahren: *a)* ein 45jähriger Mann und seine 40jährige Frau noch leben, *b)* der Mann noch lebt, die Frau aber tot ist, *c)* die Frau noch lebt, der Mann aber tot ist, *d)* nur der Mann oder die Frau allein noch lebt und *e)* beide tot sind?

27. Zeige, daß ${}_np_x \times {}_{n-1}p_y$ d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß die $x$jährige Person nach n Jahren und die $y$jährige nach $(n-1)$ Jahren noch leben, durch

$${}_{n-1}p_{x+1:y} \times p_x \quad \text{oder durch} \quad \frac{{}_np_{x:y-1}}{p_{y-1}}$$

ausgedrückt werden kann.

28. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 2 Personen, von denen die eine x, die andere y Jahre alt ist, nach n Jahren: *a)* wenigstens eine Person leben wird, *b)* wenigstens eine gestorben und *c)* nur eine am Leben sein wird?

29. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 2 Personen im Alter von x und y Jahren, die $x$jährige Person im Laufe des $(x+n)$ten Lebensjahres, unter der Annahme einer gleichförmigen Verteilung der Sterbefälle über ein Altersjahr vor der $y$jährigen Person sterben wird?

Antwort.

$$\frac{1}{2} ({}_{n-1}p_x - {}_np_x)({}_{n-1}p_y + {}_np_y).$$

6. Leibrenten- und Todesfallversicherungen.

1. Eine 35jährige Person will nach Ablauf von 25 Jahren, wenn sie dann noch lebt, über ein Kapital von K 15.000·— verfügen. Was wird sie hiefür als einmalige Prämie sofort zu zahlen haben, wenn 7 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve nach 5, 10, 15, 20 und 25 Jahren?

2. Welchen Betrag kann eine 30jährige Person nach 20 Jahren, falls sie dann noch lebt, erhalten, wenn sie dafür als einmalige Nettoprämie K 7.800·— entrichtet? Wie groß ist die Prämienreserve nach 4, 8, 12, 16 und 20 Jahren?

3. Wie groß ist bei 8prozentigem Regiezuschlage die Einmalprämie, die eine 45jährige Person zu zahlen hat, um eine Postnumerando-Rente von K 3.500·— zu erhalten? Wie groß ist die Reserve nach 5, 10 und 20 Jahren?

4. Eine 55jährige Person will, solange sie lebt, am Ende eines jeden Jahres eine Rente von K 4.000·— erhalten. Welchen einmaligen Betrag wird sie dafür zu zahlen haben, wenn 10 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 5, 10, 15 und 20 Jahren?

5. Wie groß wäre der Wert der im vorstehenden Beispiele angeführten Leibrente, wenn die Berechnung derselben mit Hilfe der wahrscheinlichen Lebensdauer durchgeführt wird?

6. Eine 60jährige Person will für K 35.205·84 eine jährlich postnumerando zahlbare Leibrente kaufen. Wie groß ist letztere, wenn 8 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve nach 4, 8, 12 und 16 Jahren?

7. Beweise:

$$a)\quad \mathrm{a}_x = 1 + v\,p_x\,\mathrm{a}_{x+1},$$
$$b)\quad \mathrm{a}_x = 1 + v\,p_x + v^2 p_x p_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1} p_{x+2} + \cdots\cdots,$$
$$c)\quad a_x = v\,p_x + v^2 p_x p_{x+1} + v^3 p_x p_{x+1} p_{x+2} + \cdots\cdots$$

8. Berechne aus der im vorstehenden Beispiele sub *a)* angeführten Gleichung die Lebenswahrscheinlichkeit für das 30. Lebensalter.

9. Eine 35jährige Person will nach Ablauf von 30 Jahren eine am Anfange eines jeden Jahres zahlbare Leibrente von K 5.000·— gegen eine einmalige Prämienzahlung erwerben Wie groß ist letztere, wenn 10 Prozent Regiezuschlag gerechnet wird? Wie groß ist die Prämienreserve nach 10, 20, 30 und 35 Jahren?

10. Eine 35jährige Person will durch eine einmalige Einzahlung von K 35.000·— eine Pränumerando-Leibrente kaufen, welche erst nach 25 Jahren zum ersten Male behoben werden soll. Wie groß wird die Rente bei 8prozentigem Regiezuschlage sein und wie groß ist die Reserve nach 15, 20, 30 und 35 Jahren?

11. Wie groß ist die einmalige Prämie, die eine 35jährige Person für eine nur 10 Jahre dauernde Postnumerando-Leibrente von K 3.500·— zu zahlen hat, wenn 10 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 6, 8 und 10 Jahren?

12. Welche Postnumerando-Rente kann eine Versicherungsanstalt einer 35jährigen Person für K 15.000·— durch 10 Jahre gewähren, wenn sie 10 Prozent Regiezuschlag rechnet? Wie groß ist die Reserve nach 4 und 8 Jahren?

13. Wie groß ist die einmalige Nettoprämie, die eine 35jährige Person zu zahlen hat, wenn sie eine von ihrem 55. Lebensjahre beginnende und 15 Jahre dauernde Leibrente von K 3.000·— beheben will? Wie groß ist die Reserve nach 15, 21 und 27 Jahren?

14. Beweise:

$$a)\quad {}_{n|}a_x = v^n \, {}_n p_x \, a_{x+n},$$

$$b)\quad {}_{|n}\mathrm{a}_x = 1 + {}_{|n-1}a_x.$$

15. Welche einmalige Nettoprämie hat eine 35jährige Person zu zahlen, wenn sie eine am Ende eines jeden Monates zahlbare Leibrente von K 3.000·—, solange sie lebt, beziehen will? Wie groß ist die Reserve nach 5, 10, 15 und 20 Jahren?

16. Eine 35jährige Person will nach Ablauf von 20 Jahren, falls sie dann noch lebt, eine bis an ihr Lebensende reichende, monatlich pränumerando zahlbare Leibrente von K 400·— erhalten. Wie groß ist die Einmalprämie, wenn ein 10prozentiger Regiezuschlag gerechnet wird? Wie groß ist die Reserve nach 15 und 25 Jahren?

Anleitnng.

$${}_{m|}\mathrm{a}_x^{(n)} = \frac{\mathrm{D}_{x+m}}{\mathrm{D}_x} \mathrm{a}_{x+m}^{(n)} = \frac{\mathrm{D}_{x+m}}{\mathrm{D}_x}\left(\mathrm{a}_{x+m} - \frac{n-1}{2n}\right).$$

17. Wie groß wäre die Einmalprämie im vorstehenden Beispiele, wenn die Rente vierteljährlich postnumerando zahlbar ist und ein 10prozentiger Regiezuschlag gerechnet wird?

18. Welche durch 10 Jahre monatlich postnumerando zahlbare Rente kann eine 70jährige Person erwerben, wenn sie dafür eine Einmalprämie von K 10.000·— zahlt und die Versicherungsanstalt 10 Prozent Regiezuschlag rechnet? Wie groß ist die Prämienreserve nach 5 und 8 Jahren?

Anleitung.

$${}_{|n}a_x^{(t)} = a_x^{(t)} - {}_{n|}a_x^{(t)}.$$

19. Beweise:

$$a)\quad {}_{m|}a_x^{(n)} = {}_{m|}a_x + \frac{n-1}{2n}\,{}_m\mathrm{E}_x,$$

$$b)\quad {}_{|n}a_x^{(t)} = {}_{|n}a_x + \frac{t-1}{2t}(1 - {}_n\mathrm{E}_x).$$

20. Eine 45jährige Person kauft für K 25.000·— eine Leibrente mit der Bedingung, daß ihr dieselbe vom 70. bis zum 80. Lebensjahre und zwar monatlich pränumerando ausbezahlt wird. Wie hoch wird die monatliche Leibrente sein und wie groß ist die Prämienreserve nach 20 und nach 30 Jahren?

21. Eine 30jährige Person will ihren Erben durch eine einmalige Einzahlung ein Kapital von K 25.000·— sichern, welches am Schlusse ihres Sterbejahres ausgezahlt werden soll. Wie groß ist in diesem Falle die Einmalprämie und wie groß würde dieselbe sein, wenn das Kapital sofort nach ihrem Tode ausgezahlt wird und wenn in beiden Fällen ein 10prozentiger Regiezuschlag gerechnet wird? Wie groß ist die Prämienreserve nach 10, 15, 20 und 25 Jahren?

22. Eine 35jährige Person will durch Zahlung eines Betrages von K 15.000·— ihren Erben ein Kapital sichern, welches am Schlusse ihres Sterbejahres ausgezahlt werden soll. Wie groß ist bei 10prozentigem Regiezuschlag die versicherte Summe und wie groß die Reserve nach 5, 10, 15 und 20 Jahren?

23. Beweise:

$$a)\quad \mathrm{A}_x = v(1 - p_x) + v\,p_x\,\mathrm{A}_{x+1},$$

$$b)\quad \mathrm{A}_x = v(1 - p_x) + v^2 p_x (1 - p_{x+1}) + v^3 p_x p_{x+1} (1 - p_{x+2}) + \cdots\cdots$$

24. Berechne aus der im vorstehenden Beispiele sub *a)* angeführten Gleichung die Lebenswahrscheinlichkeit für das 35. Lebensjahr.

25. Ein 35jähriger Mann will nach seinem Tode seinen Erben ein Vermögen von K 30.000·— hinterlassen, welches aber erst nach 5 Probejahren ausgezahlt wird; stirbt der Mann während dieser Probezeit (Karenz), so haben seine Erben keinen Anspruch auf dieses Vermögen. Wie groß ist die einmalige Prämie, wenn 10 Prozent Regiezuschlag gerechnet wird? Wie groß ist die Reserve nach 4, 5, 6 und 7 Jahren?

26. Wie groß ist das versicherte Kapital im Beispiel 22, wenn dasselbe unmittelbar nach dem Tode der versicherten Person ausgezahlt

wird und die Versicherungsanstalt 3 Probejahre festsetzt? Wie groß ist die Reserve nach 2, 4, 6 und 8 Jahren?

27. Ein 45jähriger Mann unternimmt eine Reise, die 2 Jahre dauert; er will nun während dieser Zeit seine Familie mit einem Kapital von K 20.000·— sichern. Stirbt er nach Ablauf dieser Zeit von 2 Jahren, so können seine Erben keinen Anspruch auf dieses Kapital erheben. Wie groß ist die einmalige Prämie, wenn 10 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden und wie groß die Prämienreserve nach einem Jahre?

28. A leiht dem B, der 45 Jahre alt ist, ein Kapital von K 35.000·— auf 5 Jahre mit der Bedingung, daß sich B für diese Zeit gegen Todesfall auf die geliehene Summe von K 35.000·— versichert, welche Summe an A in dem Falle ausbezahlt wird, als B vor Ablauf jener 5 Jahre stirbt. Wie viel hätte B als Einmalprämie dafür zu zahlen, wenn 10 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 3 und 4 Jahren?

29. Beweise:

$$_n\mathrm{A}_x = v \; _n\mathrm{a}_x - {}_n a_x .$$

30. Eine $x$jährige Person will durch eine einmalige Zahlung ein Kapital von K a erwerben, falls er das $(x+m)$te Lebensjahr erreicht. Stirbt sie früher, so bekommen das versicherte Kapital ihre Erben am Ende ihres Sterbejahres. Wie groß ist die Einmalprämie, wenn 8 Prozent Regiezuschlag gerechnet wird; wie groß wird die einmalige Einzahlung bei demselben Zuschlag sein, wenn das Kapital, falls sie zwischen dem $x$ten und $(x+m)$ten Lebensjahre stirbt, sofort nach ihrem Tode ausgezahlt wird und wenn:

α) $x = 40$, $m = 20$ und $a = K$ 25.000·— ist?
β) $x = 30$, $m = 30$ und $a = K$ 40.000·— ist?
γ) $x = 35$, $m = 25$ und $a = K$ 35.000·— ist?

31. Wie groß ist die Prämienreserve in allen Fällen des vorstehenden Beispieles nach 5, 10 und 15 Jahren?

32. Beweise:

$$\mathrm{A}_{x\,\overline{n|}} = \frac{1 - i \; _{|n+1}a_x}{1+i} .$$

33. Der Wert der Pränumerando-Leibrente für eine 35jährige Person beträgt 17·71474 und die Einmalprämie für eine lebenslängliche Todesfallversicherung 0·4009508. Wie groß ist der Zinsfuß, zu welchem diese Werte berechnet sind?

Anleitung.

$$\mathrm{A}_x = v - (1-v)\, a_x = \frac{1}{1+i} - \frac{i}{1+i} a_x .$$

34. Wie viel hat eine 30jährige Person jährlich und zwar am Anfange eines jeden Jahres zu zahlen, um mit dem erreichten 55. Lebensjahre eine Kapital von K 30.000·— zu erhalten, wenn die Versicherungsanstalt 15 Prozent Regiezuschlag rechnet? Wie groß ist die Prämienreserve nach 5, 10, 15, 20 und 25 Jahren?

35. Wie viel hätte in dem vorstehenden Beispiele die 30jährige Person für die versicherte Summe halbjährlich (monatlich) zu zahlen?

Anleitung.

$$\mathrm{P}^{(t)}_{x\overline{n|}}{}^{1} = \frac{_n\mathrm{E}_x}{_{|n}\mathrm{a}^{(t)}_x} .$$

36. Eine 35jährige Person will nach 30 Jahren in den Besitz eines gewissen Kapitals gelangen. Wie groß wird dasselbe sein, wenn sie durch 20 Jahre am Anfange eines jeden Jahres K 1.500·— an eine Versicherungsanstalt zahlt? Wie groß ist die Prämienreserve nach 5, 10, 20 und 25 Jahren?

37. Eine 25jährige Person will nach Ablauf von 30 Jahren, falls sie dann noch lebt, eine Pränumerando-Leibrente von K 3.000·— erhalten und statt der Einmalprämie eine sich gleichbleibende Prämie durch 30 Jahre am Anfange eines jeden Jahres zahlen. Wie groß ist die jährliche und wie groß die monatliche Prämienzahlung, wenn 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 15, 25, 30 und 35 Jahren?

38. Eine im Alter von 30 Jahren stehende Person will eine pränumerando zahlbare Leibrente von K 4.000·— für ihr 50. bis 65. Lebensjahr kaufen. Wie groß ist die während der Aufschubzeit zu zahlende Jahresprämie, wenn 18 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve nach 15, 20 und 25 Jahren?

39. Wie groß ist die halbjährliche (monatliche) Nettoprämie, welche die im vorstehenden Beispiele erwähnte 30jährige Person während der Aufschubzeit zu zahlen hätte?

40. Ein 45jähriger Mann will seinen Erben ein Vermögen von K 35.000·— hinterlassen und verpflichtet sich dafür lebenslänglich am Anfange eines jeden Jahres einen bestimmten Betrag zu zahlen. Wie groß ist dieser Betrag bei 15prozentigem Regiezuschlage? Wie groß wird dieser Betrag bei demselben Zuschlag sein, wenn er denselben nur durch 15 Jahre zu zahlen sich verpflichtet? Wie groß ist in beiden Fällen die Reserve nach 10, 15, 20 und 25 Jahren?

41. Eine 30jährige Person hat ihr Leben auf K 30.000·— gegen lebenslängliche Zahlung einer halbjährlichen (monatlichen) Prämie versichert. Wie groß ist diese Prämie, wenn die Versicherungsanstalt einen 18prozentigen Regiezuschlag rechnet? Gewinnt oder verliert die Anstalt und wie viel, wenn die versicherte Person 25 Jahre nach Abschluß des

Vertrages stirbt und der Berechnung die Prozente der Sterbetafel zugrunde gelegt werden?

42. Auf welche Summe kann eine 40jährige Person ihr Leben durch eine lebenslänglich zu zahlende Jahresprämie von K 2.500·— versichern, wenn 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 5, 10, 20 und 25 Jahren?

43. Der im Beispiele 25 genannte 35jährige Mann will den für die Versicherungssumme von K 30.000·— erforderlichen Betrag nicht auf einmal, sondern bis an sein Lebensende in jährlich gleichen Prämien entrichten. Wie groß ist diese Jahresprämie? Wie groß ist die Reserve nach 5 und 10 Jahren? Wie groß wird die Jahresprämie sein, wenn dieselbe nur durch 20 Jahre gezahlt wird? Wie groß ist in diesem Falle die Prämienreserve nach 5 und 10 Jahren?

44. Wie viel hätte die im Beispiel Nr. 28 erwähnte 45jährige Person B während der 5 Jahre an jährlicher Prämie zu zahlen, wenn 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 3 und 4 Jahren?

45. Ein im Alter von 35 Jahren stehender Mann will durch eine jährliche Einzahlung in den Besitz von K 40.000·— gelangen, wenn er das 55. Lebensjahr erreicht. Stirbt er innerhalb dieser 20 Jahre, so bekommen am Schlusse des Sterbejahres seine Erben den versicherten Betrag. Wie groß wird diese jährliche höchstens 20mal stattfindende Einzahlung sein, wenn 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve nach 5, 10, 15 und 20 Jahren?

46. Eine 45jährige Person will gegen Zahlung einer jährlichen Prämie von K 2.400·— nach Ablauf von 15 Jahren in den Besitz eines Kapitals gelangen oder bei ihrem Tode, falls derselbe innerhalb dieser 15 Jahre eintritt, es ihren Erben hinterlassen. Wie groß wird das Kapital sein, wenn 18 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 5 und 10 Jahren?

47. Beweise:

a) $$P_x = \frac{d\,A_x}{1 - A_x},$$

b) $$P^1_{x\overline{n|}} = \frac{D_x - D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} - d,$$

c) $$P^1_{x\overline{n|}} + P_{x\overline{n|}}^{\;\;1} = P_{x\overline{n|}}.$$

48. Berechne die Jahresprämie für eine lebenslängliche Todesfallversicherung aus den Lebenswahrscheinlichkeiten.

Anleitung: Aus $$a_x = \frac{1}{P_x + d}, \quad a_{x+1} = \frac{1}{P_{x+1} + d}$$

und aus $$a_x = 1 + v\,p_x\,a_{x+1}$$

folgt $$\frac{1}{P_x + d} = 1 + \frac{v\,p_x}{P_{x+1} + d}.$$

Für das höchste Alter einer Sterblichkeitstafel, d. i. für ω Jahre ist

$$P_\omega = v \quad \text{usw.}$$

49. Beweise folgende für die lebenslängliche Todesfallversicherung geltenden Gleichungen:

a) $${}_sV_x = 1 - (P_x + d)\,a_{x+s},$$

b) $${}_sV_x = \frac{a_x - a_{x+s}}{1 - a_x},$$

c) $${}_sV_x = \frac{A_{x+s} - A_x}{1 - A_x},$$

d) $${}_sV_x = \frac{P_{x+s} - P_x}{P_{x+s} + d}.$$

50. Zeige, daß bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung die Gleichung

$$l_{x+s}\,({}_sV_x + P_x)\,(1 + i) = d_{x+s} + l_{x+s+1} \times {}_{s+1}V_x$$

besteht und drücke dieselbe in Worten aus.

51. Jemand hat im Alter von 35 Jahren am 1. Oktober 1892 mit einer Versicherungsanstalt einen Vertrag abgeschlossen, daß seine Erben den Betrag von K 30.000·— am Ende seines Sterbejahres erhalten und sich dafür verpflichtet, lebenslänglich immer am 1. Oktober eines jeden Jahres eine konstante Prämie zu entrichten. Wie groß war die Reserve am 31. Dezember 1902 und wie groß ist sie, vorausgesetzt, daß der Versicherte dann noch lebt, am 31. Dezember 1920?

52. Eine 40jährige Person versicherte am 1. Juli 1908 ihr Leben gegen jährliche Prämienzahlung derart, daß sie nach 20 Jahren, falls sie dann noch lebt, ein Kapital von K 35.000·— erhält. Stirbt sie inzwischen, so bekommen ihre Erben dieses Kapital. Wie groß war die Reserve am 31. Dezember 1912, wie groß am 31. Dezember 1913 und wie groß ist sie am 31. Dezember 1914?

53. Eine 30jährige Person will durch Zahlung einer konstanten jährlichen Prämie ein Kapital von K 40.000·— erwerben, falls sie das 55. Lebensjahr erreicht. Stirbt sie inzwischen, so bekommen ihre Erben am Ende ihres Sterbejahres das versicherte Kapital. Auf welchen Betrag wird die beitragsfreie Polizze lauten, wenn die versicherte Person nach der Entrichtung der 15. Prämie die weiteren Zahlungen einstellt?

54. Eine 35jährige Person will nach einem 10jährigen Bestande einer lebenslänglichen Todesfallversicherung die versicherte Summe von K 20.000·— auf K 30.000·— erhöhen. Wie groß wird die neue Jahresprämie sein, wenn nur 80 (100) Prozent der vorhandenen Prämienreserve zu ihrer Berechnung verwendet werden?

55. Eine 40jährige Person will gegen eine lebenslänglich zu zahlende Jahresprämie nach ihrem Tode ihren Erben eine Summe von K 30.000·— hinterlassen. Nach einem 15jährigen Bestande dieser Versicherung

möchte die versicherte Person diese Summe mit dem erreichten 65. Lebensjahre ausbezahlt erhalten. Wie groß ist die neue Prämie, welche die versicherte Person nnnmehr zu zahlen hat?

56. Ein 35jähriger Mann hat eine Todesfallversicherung auf *K* 25.000·— gegen eine lebenslänglich zu zahlende Jahresprämie abgeschlossen. Mit dem erreichten 55. Lebensjahre will er die noch ausstehenden Prämien auf einmal bezahlen. Wie groß wird die Zahlung sein?

57. Eine 40jährige Person, die eine Todesfallversicherung auf *K* 30.000·— gegen eine lebenslänglich zu zahlende Jahresprämie abgeschlossen hat, will nach einem 10jährigen Bestande dieser Versicherung die weitere Prämienzahlung derart abändern, daß dieselbe mit dem 60. Lebensjahre aufhört, und zwar soll die letzte Prämie am Beginne des 60. Lebensjahres gezahlt werden. Wie groß wird die neue Jahresprämie sein?

58. Eine 35jährige Person will mit dem erreichten 60. Lebensjahre in den Besitz von *K* 25.000·— gelangen. Stirbt sie inzwischen, so sollen die bereits gezahlten Prämien ihren Erben rückerstattet werden. Wie groß ist die einmalige und wie groß die jährliche Prämie, die sie dafür zu zahlen hat, wenn 10, beziehungsweise 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve nach 10, 20 nnd 25 Jahren?

59. Ein 25jähriger Mann möchte mit dem erreichten 60. Lebensjahre in den Genuß einer lebenslänglichen Leibrente von *K* 4.000·— treten. Wie groß ist, wenn die eingezahlten Prämien rückerstattet werden, die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn 10, beziehungsweise 18 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist in beiden Fällen die Reserve nach 15, 25, 30 und 35 Jahren?

60. Eine 40jährige Person geht eine kurze Todesfallversicherung auf 15 Jahre derart ein, daß ihr mit dem erreichten 55. Lebensjahre die bis dahin gezahlten Prämien rückerstattet werden. Wie groß ist die einmalige und wie groß die jährliche Prämie, wenn die versicherte Summe *K* 20.000·— beträgt nnd wenn ein Regiezuschlag von 8, beziehungsweise 10 Prozent gerechnet wird? Wie groß ist die Prämienreserve nach 5, 10 und 15 Jahren?

---

61. Wie groß ist die einmalige Nettoprämie, die zwei Personen, von denen die eine x, die andere y Jahre alt ist, zu zahlen haben, um nach n Jahren den Betrag einer Einheit zu erhalten, wenn:

a) beide nach n Jahren noch leben,

b) entweder die $x$jährige oder die $y$jährige Person nach n Jahren am Leben ist und

c) die $x$jährige nach n Jahren lebt, die $y$jährige Person aber inzwischen gestorben ist und wenn:

α) $x = 30$, $y = 25\,(28)$ und $n = 25$ ist?

β) $x = 40$, $y = 35\,(30)$ und $n = 20$ ist?

γ) $x = 35$, $y = 30\,(34)$ und $n = 30$ ist?

Anleitung: *b)* $\frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{y+n}}{D_y} - \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$, *c)* $\frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{D_{x+n:y+n}}{D_{xy}}$.

62. Ein Ehepaar, von welchem der Mann 30 und die Frau 35 Jahre alt ist, zahlen eine bestimmte Summe, um eine Postnumerando-Rente von *K* 5.000·—, solange beide am Leben sind, zu erhalten. Wie groß ist bei einem 8prozentigen Regiezuschlag die verlangte Summe? Wie groß ist die Reserve nach 5, 10, 15 und 20 Jahren?

63. Wie groß ist die Einmalprämie, die ein im Alter von 40 uud 35 Jahren stehendes Ehepaar zahlen muß, um eine Postnumerando-Rente von *K* 4.000·— solange zu beziehen, als eine von den beiden Personen noch lebt. Wie groß ist diese Prämie bei 10prozentigem Regiezuschlage und wie groß die Reserve nach 5, 10 und 15 Jahren, vorausgesetzt, daß beide Personen noch leben?

64. Welche Postnumerando-Rente kann ein Ehepaar, von welchem Mann und Frau je 30 Jahre alt sind, durch eine einmalige Einlage von *K* 25.000·— erwerben, wenn die Rente erst mit dem Tode der zuletzt sterbenden Person erlöschen soll und wenn 10 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve nach 10, 15 und 20 Jahren, vorausgesetzt, daß beide Personen leben und wie groß nach 22 Jahren, wenn der Mann bereits gestorben und die Frau noch am Leben ist?

65. Wie groß ist die Einmalprämie, die ein Ehepaar im Alter von 35, beziehungsweise 30 Jahren zahlen muß, um, solange beide leben, eine Postnumerando-Rente von *K* 4.000·— zu erhalten; vom Tode der zuerst sterbenden Person an soll die Rente nur mehr die Hälfte betragen, so daß die überlebende Person eine jährliche Rente von *K* 2.000·— bekommt? Wie groß ist die Reserve nach 5 und 10 Jahren, vorausgesetzt, daß beide leben und wie groß, wenn der Mann bereits gestorben ist und die Frau noch lebt?

66. Zwei im Alter von 32 und 27 Jahren stehende Personen wollen eine Präuumerando-Rente von *K* 3.000·— kaufen, welche aber erst nach dem Tode der zuerst sterbenden Person zu laufen beginnt und mit dem Tode der überlebenden erlischt. Wie groß ist die Einmal- und Jahresprämie, wenn ein 10prozentiger, beziehungsweise 15prozentiger Regiezuschlag gerechnet wird und die Jahresprämie nur solange gezahlt wird, als beide Personen leben? Wie groß ist in beiden Fällen die Prämienreserve nach 10, 15 und 20 Jahren?

67. Ein 35jähriger Mann will seiner 30jährigen Frau eine Witwenrente von K 2.400·— kaufen. Welche Einmalprämie und welche Jahresprämie hätte er dafür zu zahlen, wenn 10, beziehungsweise 16 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve in beiden Fällen nach 5, 10 und 15 Jahren, vorausgesetzt, daß beide leben und wie groß, wenn der Mann bereits gestorben ist?

68. Ein 40jähriger Mann will seiner gleichaltrigen Frau gegen eine einmalige Einlage von K 12.000·— eine Witwenrente sichern. Wie groß wird die Rente bei 8prozentigem Regiezuschlage sein? Wie groß ist die Reserve nach 8 und 12 Jahren, wenn beide leben und wie groß, wenn der Mann bereits gestorben ist?

69. Wie groß ist die versicherte Rente im vorstehenden Beispiele, wenn der Mann, solange beide leben, eine jährliche Prämie von K 1 200·— bezahlt? Wie groß ist die Reserve nach 5, 10 und 12 Jahren, wenn beide leben und wie groß, wenn nur die Frau noch lebt?

70. Ein Mann im Alter von 34 Jahren will seiner um 5 Jahre jüngeren Frau eine Witwenrente von K 2.000·— gegen Zahlung einer Jahresprämie kaufen. Die Versicherungsanstalt setzt 5 Probejahre fest, so daß die Rente nur dann zur Auszahlung gelangt, wenn der Mann innerhalb der ersten 5 Jahre nicht stirbt, also nach 5 Jahren noch lebt. Wie groß ist die Jahresprämie, wenn 12 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 3 Jahren und wie groß nach 5 und 10 Jahren, wenn der Mann noch lebt und wie groß, wenn er (in den letzten zwei Fällen) bereits gestorben ist?

71. Ein Ehepaar, von welchem jeder Teil 38 Jahre alt ist, schließt mit einer Versicherungsanstalt einen Vertrag ab, nach welchem sich die Anstalt verpflichtet, an den Überlebenden nach dem Tode des anderen eine Summe von K 16.000·— zu zahlen. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn sie nur bis zum Tode der zuerst sterbenden Person gezahlt wird? Wie groß ist in beiden Fällen die Reserve nach 5, 10 und 15 Jahren?

72. Ein Ehepaar, von welchem der Mann 40, die Frau 38 Jahre alt ist, will seinen Erben ein Kapital von K 30.000·— hinterlassen, welches am Ende jenes Jahres ausgezahlt wird, in welchem der zweite Teil stirbt. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die Jahresprämie, wenn dieselbe nur bis zum ersten Tode gezahlt wird? Wie groß ist die Reserve nach 5 und 10 Jahren, wenn beide Teile noch leben und wie groß, wenn nur ein Teil noch lebt?

73. Wie groß ist die Einmalprämie, die ein 35jähriger Mann zahlen muß, um seiner 33jährigen Frau ein am Ende seines Sterbejahres zahlbares Kapital von K 20.000·— zu hinterlassen? Wie viel würde er an Jahresprämie bis zu seinem Tode oder bis zu dem etwa vorher erfolgenden Tode seiner Frau zu zahlen haben, wenn ein 15prozentiger Regiezuschlag gerechnet wird? Wie groß ist in beiden Fällen die Reserve nach 5 und 10 Jahren, wenn Mann und Frau noch leben?

74. Ein 38jähriger Mann will eine Summe bei einer Versicherungsanstalt einzahlen, um damit nach seinem Tode seiner 35jährigen Frau ein am Ende des Sterbejahres zu zahlendes Kapital von K 15.000·— zu sichern. Die Anstalt setzt 5 Probejahre fest, so daß die Frau erst nach Ablauf dieser 5 Jahre, vorausgesetzt, daß der Mann innerhalb dieses Zeitraumes nicht stirbt, einen Anspruch auf das versicherte Kapital hat. Wie groß ist die einzuzahlende Summe, wenn 8 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß wäre die bis zur Auflösung des Paares durch den Tod jährlich zu zahlende Prämie, wenn 15 Prozent Regiezuschlag gerechnet werden? Wie groß ist die Reserve in beiden Fällen nach 3 und 8 Jahren, wenn beide Personen noch leben?

75. Beweise:

a) $(a_x - a_{xy}) : (A_y - A_{xy}) = (1 + i) : i.$

b) $\dfrac{A_y - A_{\overline{xy}}}{a_x - a_{xy}} = d,$

c) $A^1_{xy} + A_{xy}^{\;1} = A_{xy}.$

76. In einer Gesellschaft, welche aus m Personen von gleichem Alter besteht, wird beim Tode eines Mitgliedes an dessen Erben von den Überlebenden je K 1·— bezahlt. Wie groß ist der gegenwärtige Wert der künftigen Zahlungen, die eine Person zu leisten hat?

Antwort:

$$\frac{m\,(m-1)}{2}\,\bar{A}_{xx}.$$

7. Pensionsversicherungen.

1. Nach den Statuten eines Pensionsfonds hätte ein Beamter nach 10 Dienstjahren, wenn er invalid wird, Anspruch auf 35 Prozent seines zuletzt bezogenen Gehaltes, welcher Anspruch während der Dauer seiner Aktivität mit jedem weiteren Dienstjahre um $1^1/_2$ Prozent so lange steigt, bis er 80 Prozent des Gehaltes erreicht. Nach vollendeten 40 Dienstjahren hätte der Beamte das Recht die 80 Prozent des Gehaltes als konstante Leibrente zu beziehen, auch wenn er zu dieser Zeit bei voller Gesundheit aus dem Dienste scheidet. Welche Leistung hätte der Fonds für einen 35jährigen Beamten zu fordern, wenn ihm bei seinem Eintritt 5, beziehungsweise 15 Dienstjahre angerechnet werden und sein Gehalt bei der Pensionsbemessung K 5.000·— beträgt? Wie groß ist die Prämienreserve nach 8, 20, 30 und 40 Dienstjahren?

2. Wie groß wäre die in monatlichen Raten im voraus zahlbare

Jahresprämie, welche der im vorstehenden Beispiele genannte 35jährige Beamte zu zahlen hätte und wie groß wäre in diesem Falle die Reserve nach 8, 20, 30 und 40 Jahren, wenn die Zahlung der Prämien höchstens bis zur Vollendung des 40. Dienstjahres stattfindet?

3. Welche Einmalprämie und welche in monatlichen Raten durch höchstens 40 Dienstjahre im voraus zahlbare Jahresprämie hätte der in den vorhergehenden 2 Beispielen genannte Fonds von dem 35jährigen Beamten für eine Witwenrente zu fordern, wenn bezüglich derselben die gleichen Bestimmungen über ihren Beginn und ihr Steigerungsverhältnis wie beim Manne gelten und wenn nur die Hälfte des Gehaltes, das der Mann hat, als Pensionsbemessungsgrundlage genommen wird? Wie groß ist die Reserve nach 8, 20, 30 und 40 Dienstjahren?

4. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die in monatlichen Raten durch höchstens 40 Dienstjahre im voraus zahlbare Jahresprämie, die ein Pensionsfonds von einem 35jährigen Beamten für eine Witwenrente zu fordern hätte, wenn in seinen Statuten die Bestimmung stehen würde, daß die Witwe nach einer 10jährigen Dienstzeit des Mannes Anspruch auf 40 Prozent des zuletzt bezogenen Gehaltes von *K* 5.000·— hätte und wenn dem Manne bei seinem Eintritt in den Fonds 5, beziehungsweise 15 Dienstjahre angerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 8, 20, 30 und 40 Dienstjahren?

5. Die Pension eines 35jährigen Beamten soll statutengemäß nach 10jähriger Dienstzeit 35 Prozent des Gehaltes von *K* 5.000·— betragen und für jedes weitere Dienstjahr um 1·5 Prozent steigen, bis sie das Maximum des Anspruches von 80 Prozent erreicht. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die in monatlichen Raten durch höchstens 40 Dienstjahre im voraus zahlbare Jahresprämie, die der Fonds für die Waisenrente zu fordern hätte, wenn sie mit $^1/_{10}$ des Gehaltes, d. i. mit *K* 500·— jährlich bemessen wird und wenn dem Beamten beim Eintritt in den Pensionsfonds 5, beziehungsweise 15 Dienstjahre angerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve nach 8, 20, 30 und 40 Dienstjahren?

6. Welche Einmalprämie und welche in monatlichen Raten im voraus zahlbare Jahresprämie hätte ein Pensionsfonds von einem 35jährigen Beamten für die einmalige Abfertigung zu fordern, wenn dieselbe nach den Statuten an die Witwe und eventuell an die Waisen mit 80 Prozent des Gehaltes von *K* 5.000·—, d. i. mit *K* 4.000·— ausgefolgt wird, falls der Beamte innerhalb der Karenzzeit stirbt und wenn die Jahresprämie unter den gleichen Bedingungen wie in den vorhergehenden Beispielen gezahlt wird? Wie groß ist die Prämienreserve in beiden Fällen nach 6, 7, 8 und 9 Dienstjahren?

Logarithmentafeln und Tabellen

zur

Politischen Arithmetik

von

Myron Dolinski

Diese Tabellen sind separat nicht käuflich

Wien 1914, Carl Fromme, Gesellschaft m. b. H.

Jahresprämie, welche der im vorstehenden Beispiele genannte 35jährige Beamte zu zahlen hätte und wie groß wäre in diesem Falle die Reserve nach 8, 20, 30 und 40 Jahren, wenn die Zahlung der Prämien höchstens bis zur Vollendung des 40. Dienstjahres stattfindet?

3. Welche Einmalprämie und welche in monatlichen Raten durch höchstens 40 Dienstjahre im voraus zahlbare Jahresprämie hätte der in den vorhergehenden 2 Beispielen genannte Fonds von dem 35jährigen Beamten für eine Witwenrente zu fordern, wenn bezüglich derselben die gleichen Bestimmungen über ihren Beginn und ihr Steigerungsverhältnis wie beim Manne gelten und wenn nur die Hälfte des Gehaltes, das der Mann hat, als Pensionsbemessungsgrundlage genommen wird? Wie groß ist die Reserve nach 8, 20, 30 und 40 Dienstjahren?

4. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die in monatlichen Raten durch höchstens 40 Dienstjahre im voraus zahlbare Jahresprämie, die ein Pensionsfonds von einem 35jährigen Beamten für eine Witwenrente zu fordern hätte, wenn in seinen Statuten die Bestimmung stehen würde, daß die Witwe nach einer 10jährigen Dienstzeit des Mannes Anspruch auf 40 Prozent des zuletzt bezogenen Gehaltes von K 5.000·— hätte und wenn dem Manne bei seinem Eintritt in den Fonds 5, beziehungsweise 15 Dienstjahre angerechnet werden? Wie groß ist die Reserve nach 8, 20, 30 und 40 Dienstjahren?

5. Die Pension eines 35jährigen Beamten soll statutengemäß nach 10jähriger Dienstzeit 35 Prozent des Gehaltes von K 5.000·— betragen und für jedes weitere Dienstjahr um 1·5 Prozent steigen, bis sie das Maximum des Anspruches von 80 Prozent erreicht. Wie groß ist die Einmalprämie und wie groß die in monatlichen Raten durch höchstens 40 Dienstjahre im voraus zahlbare Jahresprämie, die der Fonds für die Waisenrente zu fordern hätte, wenn sie mit $^1/_{10}$ des Gehaltes, d. i. mit K 500·— jährlich bemessen wird und wenn dem Beamten beim Eintritt in den Pensionsfonds 5, beziehungsweise 15 Dienstjahre angerechnet werden? Wie groß ist die Prämienreserve nach 8, 20, 30 und 40 Dienstjahren?

6. Welche Einmalprämie und welche in monatlichen Raten im voraus zahlbare Jahresprämie hätte ein Pensionsfonds von einem 35jährigen Beamten für die einmalige Abfertigung zu fordern, wenn dieselbe nach den Statuten an die Witwe und eventuell an die Waisen mit 80 Prozent des Gehaltes von K 5.000·—, d. i. mit K 4.000·— ausgefolgt wird, falls der Beamte innerhalb der Karenzzeit stirbt und wenn die Jahresprämie unter den gleichen Bedingungen wie in den vorhergehenden Beispielen gezahlt wird? Wie groß ist die Prämienreserve in beiden Fällen nach 6, 7, 8 und 9 Dienstjahren?

Logarithmentafeln und Tabellen

zur

Politischen Arithmetik

von

Myron Dolinski

Diese Tabellen sind separat nicht käuflich

Wien 1914, Carl Fromme, Gesellschaft m. b. H.

Einleitung und Gebrauch der Logarithmentafeln I und II.

Jede dekadische Zahl läßt sich in ein Produkt *dreier* Faktoren zerlegen, von denen der *erste Faktor* die sovielte Potenz von 10 ist, als der Logarithmus der betreffenden Zahl zur Charakteristik hat, der *zweite Faktor* ist ein aus den drei ersten Ziffern der Zahl gebildeter und nur aus Einer als Ganze bestehender Dezimalbruch und der *dritte Faktor* stellt eine Dezimalzahl dar, die man durch Division der betreffenden Zahl durch das Produkt aus den beiden ersten Faktoren erhält.

Z. B. die Zahl lautet 84·3592.

Der Logarithmus dieser Zahl hat die Charakteristik 1; die aus den drei ersten Ziffern gebildete und nur aus Einer als Ganze bestehende Dezimalzahl ist 8·43. Dividiert man nun die Zahl 84·3592 durch 10^1 und dann durch 8·43, so erhält man 1·0007022.

Mithin ist

$$84{\cdot}3592 = 10^1 \times 8{\cdot}43 \times 1{\cdot}0007022.$$

Als weiteres Beispiel wäre die Zahl 0·1019987.

Die Faktoren dieser Zahl sind:

$$10^{-1}, \quad 1{\cdot}01 \quad \text{und} \quad 1{\cdot}0098881.$$

Mithin ist die Zahl selbst

$$0{\cdot}1019987 = 10^{-1} \times 1{\cdot}01 \times 1{\cdot}0098881.$$

Um nun den Logarithmus irgendeiner Zahl auf 7 Dezimalstellen zu bestimmen, hat man nur, nachdem man die Zahl wie vorher in Faktoren zerlegt hat, die Logarithmen der letzten zwei Faktoren der Reihe nach aus den beiliegenden Tafeln I und II zu entnehmen, dieselben zu addieren und als Charakteristik den Potenzexponenten des ersten Faktors zu setzen.

Beispiele.

1. $\log 84{\cdot}3592 = \log 10^1 + \log 8{\cdot}43 + \log 1{\cdot}0007022.$

$$\begin{aligned} log\, 8{\cdot}43 &= 0{\cdot}925\,8276 \quad \text{[nach Tafel I]} \\ log\, 1{\cdot}0007022 &= \underline{0{\cdot}000\,3048} \quad \left[\text{nach Tafel II: } \begin{array}{r} 0{\cdot}000\,3039 \\ \underline{9} \\ 0{\cdot}000\,3048 \end{array}\right] \\ & \ 0{\cdot}926\,1324 \\ log\, 10^1 &= 1{\cdot}000\,0000 \\ \hline log\, 84{\cdot}3592 &= 1{\cdot}926\,1324. \end{aligned}$$

2. $log\, 0{\cdot}101\,9987 = log\, 10^{-1} + log\, 1{\cdot}01 + log\, 1{\cdot}009\,8881.$

$$\begin{aligned} log\, 1{\cdot}01 &= 0{\cdot}0043214 \quad \text{[nach Tafel I]} \\ log\, 1{\cdot}0098881 &= \underline{0{\cdot}004\,2733} \quad \left[\text{nach Tafel II: } \begin{array}{r} 0{\cdot}004\,2698 \\ \underline{35} \\ 0{\cdot}004\,2733 \end{array}\right] \\ & \ 0{\cdot}008\,5947 \end{aligned}$$

$log\, 0{\cdot}101\,9987 = 0{\cdot}008\,5947 - 1.$

Um umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmus den entsprechenden Numerus zu finden, bestimmt man zunächst aus der Charakteristik den ersten Faktor, sucht dann in der Tafel I die gegebene Mantisse und nimmt den ihr entsprechenden Numerus als den anderen Faktor. Ist jedoch die gegebene Mantisse in der Tafel I nicht vorhanden, so nimmt man die nächst kleinere Mantisse, deren entsprechender Numerus den zweiten Faktor gibt, subtrahiert dann die gefundene Mantisse von der gegebenen und sucht zu dieser Mantissendifferenz in der Tafel II den entsprechenden Numerus, der den dritten Faktor bildet.

Beispiele.

1. $log\, x = 2{\cdot}021\,8818.$

Der erste Faktor ist 10^2.

Nach Tafel I entspricht der nächst kleineren Mantisse 021 1893 der Numerus 1·05, der den zweiten Faktor bildet.

Die Mantissendifferenz

$$\left.\begin{aligned} 021\,8818 - 021\,1893 &= 000\,6925 \\ & \ \underline{000\,6900} \\ & \qquad 25:48 \sim 58 \end{aligned}\right\}\ \text{gibt nach Tafel II}$$

den Numerus $1{\cdot}00159_{58}$, der den dritten Faktor darstellt.

Mithin ist

$$x = 10^2 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}0015958 = 105{\cdot}16756.$$

2. $log\, x = 0{\cdot}797\,5789 - 1$

0·797 5789 — 1 . . . . 1. Faktor: 10^{-1}

0·797 2675 nach Tafel I . . . . 2. „ : 6·27

$\left.\begin{array}{r} 0{\cdot}000\,3114 \\ \underline{3082} \\ 32 \end{array}\right\}$ „ „ II . . . 3. „ : $1{\cdot}00071_{73}$

$$x = 10^{-1} \times 6{\cdot}27 \times 1{\cdot}000\,7173 = 0{\cdot}627\,4497.$$

TAFEL I.

Gemeine oder briggische Logarithmen der Zahlen von 1·01 bis einschließlich 9·99.

Num.	Logarithmen									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	000 0000	004 3214	008 6002	012 8372	017 0333	021 1893	025 3059	029 3838	033 4238	037 4265
1·1	041 3927	045 3230	049 2180	053 0784	056 9049	060 6978	064 4580	068 1859	071 8820	075 5470
1·2	079 1812	082 7854	086 3598	089 9051	093 4217	096 9100	100 3705	103 8037	107 2100	110 5897
1·3	113 9434	117 2713	120 5739	123 8516	127 1048	130 3338	133 5389	136 7206	139 8791	143 9148
1·4	146 1280	149 2191	152 2883	155 3360	158 3625	161 3680	164 3529	167 3173	170 2617	173 1863
1·5	176 0913	178 9769	181 8436	184 6914	187 5207	190 3317	193 1246	195 8997	198 6571	201 3971
1·6	204 1200	206 8259	209 5150	212 1876	214 8438	217 4839	220 1081	222 7165	225 3093	227 8867
1·7	230 4489	232 9961	235 5284	238 0461	240 5492	243 0380	245 5127	247 9733	250 4200	252 8530
1·8	255 2725	257 6786	260 0714	262 4511	264 8178	267 1717	269 5129	271 8416	274 1578	276 4618
1·9	278 7536	281 0334	283 3012	285 5573	287 8017	290 0346	292 2561	294 4662	296 6652	298 8531
2·0	301 0300	303 1961	305 3514	307 4960	309 6302	311 7539	313 8672	315 9703	318 0633	320 1463
2·1	322 2193	324 2825	326 3359	328 3796	330 4138	332 4385	334 4538	336 4597	338 4565	340 4441
2·2	342 4227	344 3923	346 3530	348 3049	350 2480	352 1825	354 1084	356 0259	357 9348	359 8355
2·3	361 7278	363 6120	365 4880	367 3559	369 2159	371 0679	372 9120	374 7483	376 5770	378 3979
2·4	380 2112	382 0170	383 8154	385 6063	387 3898	389 1661	390 9351	392 6970	394 4517	396 1993
2·5	397 9400	399 6737	401 4005	403 1205	404 8337	406 5402	408 2400	409 9331	411 6197	413 2998
2·6	414 9733	416 6405	418 3013	419 9557	421 6039	423 2459	424 8816	426 5113	428 1348	429 7523
2·7	431 3638	432 9693	434 5689	436 1626	437 7506	439 3327	440 9091	442 4798	444 0448	445 6042
2·8	447 1580	448 7063	450 2491	451 7864	453 3183	454 8449	456 3660	457 8819	459 3925	460 8978
2·9	462 3980	463 8930	465 3829	466 8676	468 3473	469 8220	471 2917	472 7564	474 2163	475 6712
3·0	477 1213	478 5665	480 0069	481 4426	482 8736	484 2998	485 7214	487 1384	488 5507	489 9585
3·1	491 3617	492 7604	494 1546	495 5443	496 9296	498 3106	499 6871	501 0593	502 4271	503 7907
3·2	505 1500	506 5050	507 8559	509 2025	510 5450	511 8834	513 2176	514 5478	515 8738	517 1959
3·3	518 5239	519 8280	521 1381	522 4442	523 7465	525 0448	526 3393	527 6299	528 9167	530 1997
3·4	531 4789	532 7544	534 0261	535 2941	536 5584	537 8191	539 0761	540 3295	541 5792	542 8254
3·5	544 0680	545 3071	546 5427	547 7747	549 0033	550 2284	551 4500	552 6682	553 8830	555 0944
3·6	556 3025	557 5072	558 7086	559 9066	561 1014	562 2929	563 4811	564 6661	565 8478	567 0264
3·7	568 2017	569 3739	570 5429	571 7088	572 8716	574 0313	575 1878	576 3414	577 4918	578 6392
3·8	579 7836	580 9250	582 0634	583 1988	584 3312	585 4607	586 5873	587 7110	588 8317	589 9496
3·9	591 0646	592 1768	593 2861	594 3926	595 4962	596 5971	597 6952	598 7905	599 8831	600 9729
4·0	602 0600	603 1444	604 2261	605 3050	606 3814	607 4550	608 5260	609 5944	610 6602	611 7233
4·1	612 7839	613 8418	614 8972	615 9501	617 0003	618 0481	619 0933	620 1361	621 1763	622 2140
4·2	623 2493	624 2821	625 3125	626 3404	627 3659	628 3889	629 4096	630 4279	631 4438	632 4573
4·3	633 4685	634 4773	635 4837	636 4879	637 4897	638 4893	639 4865	640 4814	641 4741	642 4645
4·4	643 4527	644 4386	645 4223	646 4037	647 3830	648 3600	649 3349	650 3075	651 2780	652 2463
4·5	653 2125	654 1765	655 1384	656 0982	657 0559	658 0114	658 9648	659 9162	660 8655	661 8127
4·6	662 7578	663 7009	664 6420	665 5810	666 5180	667 4530	668 3859	669 3169	670 2459	671 1728
4·7	672 0979	673 0209	673 9420	674 8611	675 7783	676 6936	677 6070	678 5184	679 4279	680 3355
4·8	681 2412	682 1451	683 0470	683 9471	684 8454	685 7417	686 6363	687 5290	688 4198	689 3089
4·9	690 1961	691 0815	691 9651	692 8469	693 7269	694 6052	695 4817	696 3564	697 2293	698 1005
5 0	698 9700	699 8377	700 7037	701 5680	702 4305	703 2914	704 1505	705 0080	705 8637	706 7178
5·1	707 5702	708 4209	709 2700	710 1174	710 9631	711 8072	712 6497	713 4905	714 3298	715 1674
5·2	716 0033	716 8377	717 6705	718 5017	719 3313	720 1593	720 9857	721 8106	722 6339	723 4557
5·3	724 2759	725 0945	725 9116	726 7272	727 5413	728 3538	729 1648	729 9743	730 7833	731 5888
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TAFEL I.

Gemeine oder briggische Logarithmen der Zahlen von 1·01 bis einschließlich 9·99.

Num.	Logarithmen									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5·4	732 3938	733 1973	733 9993	734 7998	735 5989	736 3965	737 1926	737 9873	738 7806	739 5723
5·5	740 3627	741 1516	741 9391	742 7251	743 5098	744 2930	745 0748	745 8552	746 6342	747 4118
5·6	748 1880	748 9629	749 7363	750 5084	751 2791	752 0484	752 8164	753 5831	754 3483	755 1123
5·7	755 8749	756 6361	757 3960	758 1546	758 9119	759 6678	760 4225	761 1758	761 9278	762 6786
5·8	763 4280	764 1761	764 9230	765 6686	766 4128	767 1559	767 8976	768 6381	769 3773	770 1153
5·9	770 8520	771 5875	772 3217	773 0547	773 7864	774 5170	775 2463	775 9743	776 7012	777 4268
6·0	778 1513	778 8745	779 5965	780 3173	781 0369	781 7554	782 4726	783 1887	783 9036	784 6173
6 1	785 3298	786 0412	786 7514	787 4605	788 1684	788 8751	789 5807	790 2852	790 9885	791 6906
6·2	792 3917	793 0916	793 7904	794 4880	795 1846	795 8800	796 5743	797 2675	797 9596	798 6506
6·3	799 3405	800 0294	800 7171	801 4037	802 0893	802 7737	803 4571	804 1394	804 8207	805 5009
6·4	806 1800	806 8580	807 5350	808 2110	808 8859	809 5597	810 2325	810 9043	811 5750	812 2447
6·5	812 9134	813 5810	814 2576	814 9132	915 5777	816 2413	816 9038	817 5654	818 2259	818 8854
6 6	819 5439	820 2015	820 8580	821 5135	822 1681	822 8216	823 4742	824 1258	824 7765	825 4261
6·7	826 0748	826 7225	827 3693	828 0151	828 6599	829 3038	829 9467	830 5887	831 2297	831 8698
6·8	832 5089	833 1471	833 7844	834 4207	835 0561	835 6906	836 3241	836 9567	837 5884	838 2192
6·9	838 8491	839 4780	840 1061	840 7332	841 3595	841 9848	842 6092	843 2328	843 8554	844 4772
7·0	845 0980	845 7180	846 3371	846 9553	847 5727	848 1891	848 8047	849 4194	850 0333	850 6462
7·1	851 2583	851 8696	852 4800	853 0895	853 6982	854 3060	854 9130	855 5192	856 1244	856 7289
7·2	857 3325	857 9353	858 5372	859 1383	859 7386	860 3380	860 9366	861 5344	862 1314	862 7275
7·3	863 3229	863 9174	864 5111	865 1040	865 6961	866 2873	866 8778	867 4675	868 0564	868 6444
7·4	869 2317	869 8182	870 4039	870 9888	871 5729	872 1563	872 7388	873 3206	873 9016	874 4818
7·5	875 0613	875 6399	876 2178	876 7950	877 3713	877 9470	878 5218	879 0959	879 6692	880 2418
7·6	880 8136	881 3847	881 9550	882 5245	883 0934	883 6614	884 2288	884 7954	885 3612	885 9263
7 7	886 4907	887 0544	887 6173	888 1795	888 7410	889 3017	889 8617	890 4210	890 9796	891 5375
7·8	892 0946	892 6510	893 2068	893 7618	894 3161	894 8697	895 4225	895 9747	896 5262	897 0770
7·9	897 6271	898 1765	898 7252	899 2732	899 8205	900 3671	900 9131	901 4583	902 0029	902 5468
8·0	903 0900	903 6325	904 1744	904 7155	905 2560	905 7959	906 3350	906 8735	907 4114	907 9485
8·1	908 4850	909 0209	909 5560	910 0905	910 6244	911 1576	911 6902	912 2221	912 7533	913 2839
8 2	913 8139	914 3432	914 8718	915 3998	915 9272	916 4539	916 9800	917 5055	918 0303	918 5045
8·3	919 0781	919 6010	920 1233	920 6450	921 1661	921 6865	922 2063	922 7255	923 2440	923 7620
8·4	924 2793	924 7960	925 3121	975 8276	926 3324	926 8567	927 3704	927 8834	928 3959	928 9077
8·5	929 4189	929 9296	930 4396	930 9490	931 4579	931 9661	932 4738	932 9808	933 4873	933 9932
8·6	934 4985	935 0032	935 5073	936 0108	936 5137	937 0161	937 5179	938 0191	938 5197	939 0198
8·7	939 5193	940 0182	940 5165	941 0142	941 5114	942 0081	942 5041	942 9996	943 4945	943 9889
8·8	944 4827	944 9759	945 4686	945 9607	946 4523	946 9433	947 4337	947 9236	948 4130	948 9018
8·9	949 3900	949 8777	950 3649	950 8515	951 3375	951 8230	952 3080	952 7924	953 2763	953 7597
9·0	954 2425	954 7248	955 2065	955 6878	956 1684	956 6186	957 1282	957 6073	958 0858	958 5639
9 1	959 0414	959 5184	959 9948	960 4708	960 9462	961 4211	961 8955	962 3693	962 8427	963 3155
9·2	963 7878	964 2596	964 7309	965 2017	965 6720	966 1417	966 6110	967 0797	967 5480	968 0157
9·3	968 4829	968 9497	969 4159	969 8816	970 3469	970 8116	971 2758	971 7396	972 2028	972 6656
9·4	973 1279	973 5896	974 0509	974 5117	974 9720	975 4318	975 8911	976 3500	976 8083	977 2662
9·5	977 7236	978 1805	978 6369	979 0929	979 5484	980 0034	980 4579	980 9119	981 3655	981 8186
9·6	982 2712	982 7234	983 1751	983 6263	984 0770	984 5273	984 9771	985 4265	985 8754	986 3238
9·7	986 7717	987 2192	987 6663	988 1128	988 5590	989 0046	989 4498	989 8946	990 3389	990 7827
9·8	991 2261	991 6690	992 1115	992 5535	992 9951	993 4362	993 8769	994 3172	994 7569	995 1963
9·9	995 6352	996 0737	996 5117	996 9492	997 3864	997 8231	998 2593	998 6952	999 1305	999 5655
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TAFEL II.

Gemeine oder briggische Logarithmen der Zahlen von 1·00001 bis einschließlich 1·00999.

Num.	Logarithmen										P. P.
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1·0000	000 0000	0043	0087	0130	0174	0217	0261	0304	0347	0391	
1·0001	0434	0478	0521	0565	0608	0651	0695	0738	0782	0825	
1·0002	0869	0912	0955	0999	1042	1086	1129	1172	1216	1259	
1·0003	1303	1346	1390	1433	1476	1520	1563	1607	1650	1693	
1 0004	1737	1780	1824	1867	1910	1954	1997	2041	2084	2128	44
1·0005	2171	2214	2258	2301	2345	2388	2431	2475	2518	2562	
1·0006	2605	2648	2692	2735	2779	2822	2865	2909	2952	2996	
1·0007	3039	3082	3126	3169	3213	3256	3299	3343	3386	3430	1 4·4
1·0008	3473	3516	3560	3603	3647	3690	3733	3777	3820	3864	2 8·8
1·0009	3907	3950	3994	4037	4080	4124	4167	4211	4254	4297	3 13·2
1·0010	4341	4384	4428	4471	4514	4558	4601	4644	4688	4731	4 17·6
1·0011	4775	4818	4861	4905	4948	4992	5035	5078	5122	5165	5 22·0
1 0012	5208	5252	5295	5339	5382	5425	5469	5512	5555	5599	6 26·4
1·0013	5642	5686	5729	5772	5816	5859	5902	5946	5989	6033	7 30·8
1·0014	6076	6119	6163	6206	6249	6293	6336	6379	6423	6466	8 35·2
1·0015	6510	6553	6596	6640	6683	6726	6770	6813	6856	6900	9 39·6
1·0016	6943	6987	7030	7073	7117	7160	7203	7247	7290	7333	
1·0017	7377	7420	7463	7507	7550	7594	7637	7680	7724	7767	
1·0018	7810	7854	7897	7940	7984	8027	8070	8114	8157	8200	
1·0019	8244	8287	8330	8374	8417	8460	8504	8547	8591	8634	
1·0020	8677	8721	8764	8807	8851	8894	8937	8981	9024	9067	
1·0021	9111	9154	9197	9241	9284	9327	9371	9414	9457	9501	
1 0022	9544	9587	9631	9674	9717	9761	9804	9847	9891	9934	
1·0023	9977	*0021	*0064	*0107	*0151	*0194	*0237	*0281	*0324	*0367	
1·0024	001 0411	0454	0497	0541	0584	0627	0671	0714	0757	0800	
1·0025	0844	0887	0930	0974	1017	1060	1104	1147	1190	1234	43
1·0026	1277	1320	1364	1407	1450	1494	1537	1580	1624	1667	
1·0027	1710	1753	1797	1840	1883	1927	1970	2013	2057	2100	
1·0028	2143	2187	2230	2273	2316	2360	2403	2446	2490	2533	1 4·3
1·0029	2576	2620	2663	2706	2750	2793	2836	2879	2923	2966	2 8·6
1·0030	3009	3053	3096	3139	3183	3226	3269	3312	3356	3399	3 12·9
1·0031	3442	3486	3529	3572	3615	3659	3702	3745	3789	3832	4 17·2
1·0032	3875	3919	3962	4005	4048	4092	4135	4178	4222	4265	5 21·5
1·0033	4308	4351	4395	4438	4481	4525	4568	4611	4654	4698	6 25·8
1·0034	4741	4784	4828	4871	4914	4957	5001	5044	5087	5130	7 30·1
1·0035	5174	5217	5260	5304	5347	5390	5433	5477	5520	5563	8 34·4
1·0036	5607	5650	5693	5736	5780	5823	5866	5909	5953	5996	9 38·7
1·0037	6039	6083	6126	6169	6212	6256	6299	6342	6385	6429	
1·0038	6472	6515	6558	6602	6645	6688	6731	6775	6818	6861	
1·0039	6905	6948	6991	7034	7078	7121	7164	7207	7251	7294	
1·0040	7337	7380	7424	7467	7510	7553	7597	7640	7683	7726	
1·0041	7770	7813	7856	7899	7943	7986	8029	8072	8116	8159	
1·0042	8202	8245	8289	8332	8375	8418	8462	8505	8548	8591	
1·0043	8635	8678	8721	8764	8808	8851	8894	8937	8981	9024	
1·0044	9067	9110	9154	9197	9240	9283	9326	9370	9413	9456	
1·0045	9499	9543	9586	9629	9672	9716	9759	9802	9845	9889	
1·0046	9932	9975	*0018	*0061	*0105	*0148	*0191	*0234	*0278	*0321	
1·0047	002 0364	0407	0450	0494	0537	0580	0623	0667	0710	0753	
1·0048	0796	0839	0883	0926	0969	1012	1056	1099	1142	1185	
1·0049	1228	1272	1315	1358	1401	1445	1488	1531	1574	1617	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

TAFEL II.

Gemeine oder briggische Logarithmen der Zahlen von 1·00001 bis einschließlich 1·00999.

Num.	Logarithmen 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
1·0050	002 1661	1704	1747	1790	1833	1877	1920	1963	2006	2050	
1·0051	2093	2136	2179	2222	2266	2309	2352	2395	2438	2482	44
1·0052	2525	2568	2611	2654	2698	2741	2784	2827	2870	2914	
1·0053	2957	3000	3043	3086	3130	3173	3216	3259	3302	3346	
1·0054	3389	3432	3475	3518	3562	3605	3648	3691	3734	3778	
1·0055	3821	3864	3907	3950	3994	4037	4080	4123	4166	4209	1 4·4
1·0056	4253	4296	4339	4382	4425	4469	4512	4555	4598	4641	2 8·8
1·0057	4685	4728	4771	4814	4857	4900	4944	4987	5030	5073	3 13·2
1·0058	5116	5159	5203	5246	5289	5332	5375	5419	5462	5505	4 17·6
1·0059	5548	5591	5634	5678	5721	5764	5807	5850	5893	5937	5 22·0
1·0060	5980	6023	6066	6109	6152	6196	6239	6282	6325	6368	6 26·4
1·0061	6411	6455	6498	6541	6584	6627	6670	6714	6757	6800	7 30·8
1·0062	6843	6886	6929	6973	7016	7059	7102	7145	7188	7232	8 35·2
1·0063	7275	7318	7361	7404	7447	7491	7534	7577	7620	7663	9 39·6
1·0064	7706	7749	7793	7836	7879	7922	7965	8008	8051	8095	
1·0065	8138	8181	8224	8267	8310	8354	8397	8440	8483	8526	
1·0066	8569	8612	8656	8699	8742	8785	8828	8871	8914	8958	
1·0067	9001	9044	9087	9130	9173	9216	9260	9303	9346	9389	
1·0068	9432	9475	9518	9561	9605	9648	9691	9734	9777	9820	
1·0069	9863	9907	9950	9993	*0036	*0079	*0122	*0165	*0208	*0252	
1·0070	003 0295	0338	0381	0424	0467	0510	0553	0597	0640	0683	
1·0071	0726	0769	0812	0855	0898	0942	0985	1028	1071	1114	
1·0072	1157	1200	1243	1287	1330	1373	1416	1459	1502	1545	
1·0073	1588	1631	1675	1718	1761	1804	1847	1890	1933	1976	43
1·0074	2019	2063	2106	2149	2192	2235	2278	2321	2364	2407	
1·0075	2451	2494	2537	2580	2623	2666	2709	2752	2795	2838	
1·0076	2882	2925	2968	3011	3054	3097	3140	3183	3226	3269	
1·0077	3313	3356	3399	3442	3485	3528	3571	3614	3657	3700	1 4·3
1·0078	3744	3787	3830	3873	3916	3959	4002	4045	4088	4131	2 8·6
1·0079	4174	4218	4261	4304	4347	4390	4433	4476	4519	4562	3 12·9
1·0080	4605	4648	4691	4735	4778	4821	4864	4907	4950	4993	4 17·2
1·0081	5036	5079	5122	5165	5208	5252	5295	5338	5381	5424	5 21·5
1·0082	5467	5510	5553	5596	5639	5682	5725	5768	5812	5855	6 25·8
1·0083	5898	5941	5984	6027	6070	6113	6156	6199	6242	6285	7 30·1
1·0084	6328	6371	6415	6458	6501	6544	6587	6630	6673	6716	8 34·4
1·0085	6759	6802	6845	6888	6931	6974	7017	7060	7104	7147	9 38·7
1·0086	7190	7233	7276	7319	7362	7405	7448	7491	7534	7577	
1·0087	7620	7663	7706	7749	7792	7835	7879	7922	7965	8008	
1·0088	8051	8094	8137	8180	8223	8266	8309	8352	8395	8438	
1·0089	8481	8524	8567	8610	8653	8696	8739	8783	8826	8869	
1·0090	8912	8955	8998	9041	9084	9127	9170	9213	9256	9299	
1·0091	9342	9385	9428	9471	9514	9557	9600	9643	9686	9729	
1·0092	9772	9815	9858	9902	9945	9988	*0031	*0074	*0117	*0160	
1·0083	004 0203	0246	0289	0332	0375	0418	0461	0504	0547	0590	
1·0094	0633	0676	0719	0762	0805	0848	0891	0934	0977	1020	
1·0095	1063	1106	1149	1192	1235	1278	1321	1364	1407	1450	
1·0096	1493	1536	1579	1622	1665	1708	1752	1795	1838	1881	
1·0097	1924	1967	2010	2053	2096	2139	2182	2225	2268	2311	
1·0098	2354	2397	2440	2483	2526	2569	2612	2655	2698	2741	
1·0099	2784	2827	2870	2913	2956	2999	3042	3085	3128	3171	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

I.

Zinseszinsen-Tabellen.

I. Die Werte von $r^n = (1+i)^n$, beziehungsweise $u^n = \frac{1}{(1-j)^n}$.

II. Die Werte von $v^n = \frac{1}{r^n}$, beziehungsweise $w^n = \frac{1}{u^n}$.

III. Die Werte von $s_{\overline{n}|} = \Sigma r^n$, beziehungsweise $\bar{s}_{\overline{n}|} = \Sigma u^n$.

IV. Die Werte von $a_{\overline{n}|} = \Sigma v^n$, beziehungsweise $\bar{a}_{\overline{n}|} = \Sigma w^n$.

V. Die Werte von $\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\Sigma v^n}$, beziehungsweise $\frac{w}{\bar{a}_{\overline{n}|}} = \frac{w}{\Sigma w^n}$.

VI. Die Werte von $\Sigma \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{z}$.

TABELLE I.

Wert von $r^n = (1+i)^n$, beziehungsweise $u^n = \frac{1}{(1-j)^n}$.

n	2% dekursiv	2% antizipativ	2½% deknrsiv	2½% antizipativ	3% dekursiv	3% antizipativ	n
1	1·02	*1·0204 0816*	1·025	*1·0256 4103*	1·03	*1·0309 2784*	1
2	1·0404	*1·0412 3282*	1·0506 25	*1·0519 3951*	1·0609	*1·0628 1220*	2
3	1·0612 08	*1·0624 8247*	1·0768 9063	*1·0789 1232*	1·0927 27	*1·0956 8268*	3
4	1·0824 3216	*1·0841 6578*	1·1038 1289	*1·1065 7674*	1·1355 0881	*1·1295 6977*	4
5	1·1040 8080	*1·1062 9162*	1·1314 0821	*1·1349 5050*	1·1592 7407	*1·1645 0492*	5
6	1·1261 6242	*1·1288 6900*	1·1596 9342	*1·1640 5180*	1·1940 5230	*1·2005 2054*	6
7	1·1486 8567	*1·1519 0714*	1·1886 8575	*1·1938 9928*	1·2298 7387	*1·2376 5004*	7
8	1·1716 5938	*1·1754 1545*	1·2184 0290	*1·2245 1208*	1·2667 7008	*1·2759 2788*	8
9	1·1950 9257	*1·1994 0352*	1·2488 6297	*1·2559 0983*	1·3047 7318	*1·3153 8956*	9
10	1·2189 9442	*1·2238 8114*	1·2800 8454	*1·2881 1264*	1·3439 1638	*1·3560 7171*	10
11	1·2433 7431	*1·2488 5831*	1·3120 8666	*1·3211 4117*	1·3842 3387	*1·3980 1208*	11
12	1·2682 4179	*1·2743 4521*	1·3448 8882	*1·3550 1659*	1·4257 6089	*1·4412 4956*	12
13	1·2936 0663	*1·3003 5226*	1·3785 1104	*1·3897 6060*	1·4685 3371	*1·4858 2429*	13
14	1·3194 7876	*1·3268 9006*	1·4129 7382	*1·4253 9549*	1·5125 8972	*1·5317 7762*	14
15	1·3458 6834	*1·3539 6945*	1·4482 9817	*1·4619 4409*	1·5579 6742	*1·5791 5219*	15
16	1·3727 8571	*1·3816 0148*	1·4845 0662	*1·4994 2984*	1·6047 0644	*1·6279 9194*	16
17	1·4002 4142	*1·4097 9743*	1·5216 1826	*1·5378 7676*	1·6528 4763	*1·6783 4221*	17
18	1·4282 4625	*1·4385 6880*	1·5596 5872	*1·5773 0949*	1·7024 3306	*1·7302 4970*	18
19	1·4568 1117	*1·4679 2735*	1·5986 5019	*1·6177 5333*	1·7535 0605	*1·7837 6258*	19
20	1·4859 4740	*1·4978 8505*	1·6386 1644	*1·6592 3418*	1·8061 1123	*1·8389 3049*	20
21	1·5156 6634	*1·5284 5413*	1·6795 8185	*1·7017 7865*	1·8602 9457	*1·8958 0463*	21
22	1·5459 7967	*1·5596 4707*	1·7215 7140	*1·7454 1400*	1·9161 0341	*1·9544 3777*	22
23	1·5768 9926	*1·5914 7661*	1·7646 1068	*1·7901 6820*	1·9735 8651	*2·0148 8430*	23
24	1·6084 3725	*1·6239 5572*	1·8087 2595	*1·8360 6995*	2·0327 9411	*2·0772 0030*	24
25	1·6406 0599	*1·6570 9767*	1·8539 4410	*1·8831 4867*	2·0937 7793	*2·1414 4361*	25
26	1·6734 1811	*1·6909 1599*	1·9002 9270	*1·9314 3453*	2·1565 9127	*2·2076 7383*	26
27	1·7068 8648	*1·7254 2448*	1·9478 0002	*1·9809 5849*	2·2212 8901	*2·2759 5240*	27
28	1·7410 2421	*1·7606 3723*	1·9964 9502	*2·0317 5230*	2·2879 2768	*2·3463 4268*	28
29	1·7758 4469	*1·7965 6860*	2·0464 0739	*2·0838 4851*	2·3565 6551	*2·4189 0998*	29
30	1·8113 6158	*1·8332 3327*	2·0975 6758	*2·1372 8053*	2·4272 6247	*2·4937 2163*	30
31	1·8475 8882	*1·8706 4619*	2·1500 0677	*2·1920 8259*	2·5000 8035	*2·5708 4704*	31
32	1·8845 4059	*1·9088 2264*	2·2037 5694	*2·2482 8984*	2·5750 8276	*2·6503 5777*	32
33	1·9222 3140	*1·9477 7820*	2·2588 5086	*2·3059 3830*	2 6523 3524	*2·7323 2760*	33
34	1·9606 7603	*1·9875 2878*	2·3153 2213	*2·3650 6192*	2·7319 0530	*2·8168 3258*	34
35	1·9998 8955	*2·0280 9059*	2·3732 0519	*2·4257 0761*	2·8138 6245	*2·9039 5111*	35
36	2·0398 8734	*2·0694 8020*	2·4325 3532	*2·4879 0524*	2·8982 7833	*2·9937 6403*	36
37	2·0806 8509	*2·1117 1449*	2·4933 4870	*2·5516 9768*	2·9852 2668	*3·0863 5467*	37
38	2·1222 9879	*2·1548 1070*	2·5556 8242	*2·6171 2583*	3·0747 8348	*3·1818 0894*	38
39	2·1647 4477	*2·1987 8643*	2·6195 7448	*2·6842 3162*	3·1670 2698	*3·2802 1540*	39
40	2·2080 3966	*2·2436 5962*	2·6850 6384	*2·7530 5807*	3·2620 3779	*3·3816 6536*	40
41	2·2522 0046	*2·2894 4859*	2·7521 9043	*2·8236 4930*	3·3598 9893	*3·4862 5295*	41
42	2·2972 4447	*2·3361 7203*	2·8209 9520	*2·8960 5057*	3·4606 9589	*3·5940 7521*	42
43	2·3431 8936	*2·3838 4902*	2·8915 2008	*2·9703 0827*	3·5645 1677	*3·7052 3217*	43
44	2·3900 5314	*2·4324 9900*	2·9638 0808	*3·0464 7002*	3·6714 5227	*3·8198 2698*	44
45	2·4378 5421	*2·4821 4183*	3·0879 0328	*3·1245 8464*	3·7815 9584	*3·9379 6596*	45
46	2·4866 1129	*2·5327 9779*	3·1138 5086	*3·2047 0220*	3·8950 4372	*4·0597 5872*	46
47	2·5363 4351	*2·5844 8754*	3·1916 9713	*3·2868 7405*	4·0118 9503	*4·1853 1827*	47
48	2·5870 7039	*2·6372 3218*	3·2714 8956	*3·3711 5287*	4·1322 5188	*4·3147 6111*	48
49	2·6388 1179	*2·6910 5325*	3·3532 7680	*3·4575 9269*	4 2562 1944	*4·4482 0733*	49
51	2·6915 8803	*2·7459 7270*	3·4371 0872	*3·5462 4891*	4·3839 0602	*4·5857 8075*	50

TABELLE I.

Wert von $r^n = (1+i)^n$, beziehungsweise $u^n = \frac{1}{(1-j)^n}$.

n	3½% deknrsiv	3½% antizipativ	4% deknrsiv	4% antizipativ	4½% dekursiv	4½% antizipativ	n
1	1·035	*1·0362 6943*	1·04	*1·0416 6667*	1·045	*1·0471 2042*	1
2	1·0712 25	*1·0738 5433*	1·0816	*1·0850 6944*	1·0920 25	*1·0964 6117*	2
3	1·1087 1788	*1·1128 0242*	1·1248 64	*1·1302 8067*	1·1411 6613	*1·1481 2688*	3
4	1·1475 2300	*1·1531 6313*	1·1698 5856	*1·1773 7570*	1·1925 1860	*1·2022 2710*	4
5	1·1876 8631	*1·1949 8769*	1·2166 5290	*1 2264 3302*	1·2461 8194	*1·2588 7655*	5
6	1·2292 5533	*1·2383 2922*	1·2653 1902	*1·2775 3440*	1·3022 6012	*1·3181 9534*	6
7	1·2722 7926	*1·2832 4271*	1·3159 3178	*1·3307 6500*	1·3608 6183	*1·3803 0925*	7
8	1·3168 0904	*1·3297 8519*	1·3685 6905	*1·3862 1354*	1·4221 0061	*1·4453 5000*	8
9	1·3628 9735	*1·3780 1575*	1·4233 1181	*1·4439 7243*	1·4860 9514	*1·5134 5550*	9
10	1·4105 9876	*1·4279 9559*	1·4802 4428	*1·5041 3795*	1·5529 6942	*1·5847 7016*	10
11	1·4599 6972	*1·4797 8818*	1·5394 5406	*1·5668 1037*	1·6228 5305	*1·6594 4519*	11
12	1·5110 6866	*1·5334 5925*	1 6010 3222	*1·6320 9413*	1·6958 8143	*1·7376 3894*	12
13	1·5639 5606	*1·5890 7694*	1·6650 7351	*1·7000 9805*	1·7721 9610	*1·8195 1722*	13
14	1·6186 9452	*1·6467 1186*	1·7316 7645	*1·7709 3547*	1·8519 4492	*1·9052 5363*	14
15	1·6753 4883	*1·7064 3716*	1·8009 4351	*1·8447 2445*	1·9352 8244	*1·9950 2998*	15
16	1·7339 8604	*1·7683 2866*	1 8729 8125	*1·9215 8797*	2 0223 7015	*2·0890 3663*	16
17	1·7946 7555	*1 8324 6494*	1·9479 0050	*2·0016 5414*	2·1133 7681	*2·1874 7291*	17
18	1·8574 8920	*1·8989 2739*	2 0258 1652	*2·0850 5639*	2·2084 7877	*2·2905 4755*	18
19	1 9225 0132	*1·9678 0041*	2·1068 4918	*2·1719 3374*	2·3078 6031	*2·3984 7911*	19
20	1·9897 8886	*2·0391 7141*	2·1911 2314	*2·2624 3098*	2·4117 1402	*2·5114 9645*	20
21	1·0594 3147	*2·1131 3099*	2·2787 6807	*2·3566 9894*	2·5202 4116	*2·6298 3921*	21
22	1·1315 1158	*2·1897 7305*	2·3699 1879	*2·4548 9473*	2·6336 5201	*2·7537 5834*	22
23	2·2061 1448	*2·3691 9487*	2·4647 1554	*2·5571 8201*	2·7521 6635	*2·8835 1658*	23
24	2·2833 2849	*2·3514 9727*	2·5633 0416	*2·6637 3126*	2 8760 1383	*3·0193 8909*	24
25	2·3632 4498	*2·4367 8474*	2·6658 3633	*2·7747 2006*	3·0054 3446	*3·1616 6397*	25
26	2·4459 5856	*2·5251 6553*	2 7724 6978	*2·8903 3340*	3·1406 7901	*3·3106 4290*	26
27	2·5315 6711	*2·6167 5185*	2·8833 6858	*3·0107 6395*	3·2820 0956	*3·4666 4178*	27
28	2·6201 7196	*2·7116 5995*	2·9987 0332	*3·1302 1245*	3·4296 9998	*3·6299 9140*	28
29	2·7118 7798	*2 8100 1031*	3 1186 5145	*3·2668 8797*	3·5840 3649	*3·8010 3811*	29
30	2 8067 9370	*2·9119 2778*	3·2433 9751	*3·4030 0830*	3 7453 1813	*3·9801 4462*	30
31	2·9050 3148	*3·0175 4174*	3 3731 3341	*3·5448 0032*	3·9138 5745	*4,1676 9070*	31
32	3·0067 0759	*3·1269 8626*	3·5080 5875	*3·6925 0033*	4·0899 8104	*4·3640 7403*	32
33	3 1119 4235	*3·2404 0027*	3·6483 8110	*3·8463 5451*	4·2740 3018	*4·5697 1103*	33
34	3·2208 6033	*3·3579 2774*	3·7943 1634	*4·0066 1928*	4·4663 6154	*4·7850 3773*	34
35	3·3335 9045	*3·4797 1787*	3·9460 8899	*4·1735 6175*	4·6673 4781	*5·0105 1071*	35
36	3·4502 6611	*3·6059 2525*	4·1039 3255	*4·3474 6016*	4 8773 7846	*5·2466 0807*	36
37	3·5710 2543	*2·7367 1010*	4·2680 8986	*4·5286 0433*	5 0968 6049	*5·4938 3044*	37
38	3·6960 1132	*3·8722 3845*	4·4388 1345	*4·7172 9618*	5·3262 1921	*5·7527 0203*	38
39	3·8253 7171	*4·0126 8233*	4·6163 6599	*4·9138 5019*	5·5658 9908	*6·0237 7176*	39
40	3·9592 5972	*4·1582 2003*	4·8010 2063	*5·1185 9394*	5·8163 6454	*6·3076 1441*	40
41	4·0978 3381	*4·3090 3630*	4·9930 6145	*5·3318 6869*	6·0781 0094	*6·6048 3184*	41
42	4·2412 5799	*4·4653 2259*	5·1927 8391	*5·5540 2989*	6·3516 1548	*6·9160 5429*	42
43	4·3897 0202	*4·6272 7730*	5·4004 9527	*5·7854 4780*	6 6374 3818	*7·2419 4166*	43
44	4·5433 4160	*4·7951 0601*	5·6165 1508	*6·0265 0812*	6·9361 2290	*7·5831 8498*	44
45	4 7023 5855	*4·9690 2177*	5·8411 7568	*6·2776 1263*	7·2482 4843	*7·9405 0784*	45
46	4 8669 4110	*5·1492 4536*	6·0748 2271	*6·5391 7982*	7·5744 1961	*8·3146 6789*	46
47	5·0372 8404	*5·3360 0555*	6·3178 1562	*6·8116 4565*	7·9152 6849	*8·7064 5853*	47
48	5·2135 8898	*5·5295 3943*	6·5705 2824	*7·0954 6422*	8·2714 5557	*9·1167 1050*	48
49	5·3960 6459	*5·7300 9268*	6·8333 4937	*7·3911 0856*	8·6436 7107	*9·5462 9372*	49
50	5·5849 2686	*5·9379 1987*	7·1066 8335	*7·6990 7141*	9·0326 3627	*9·9961 1907*	50

TABELLE I.

Wert von $r^n = (1 + i)^n$, beziehungsweise $u^n = \frac{1}{(1 - j)^n}$.

n	5% dekursiv	5% antizipativ	6% dekursiv	6% antizipativ	n
1	1·05	1·0526 3158	1·06	1·0638 2979	1
2	1·1025	1·1080 3324	1·1236	1·1317 3382	2
3	1·1576 25	1·1663 5078	1·1910 16	1·2039 7214	3
4	1·2155 0625	1·2277 3766	1·2624 7696	1·2808 2143	4
5	1·2762 8156	1·2923 5543	1·3382 2558	1·3625 7599	5
6	1·3400 9564	1·3603 7414	1·4185 1911	1·4495 4893	6
7	1·4071 0042	1·4319 7278	1·5036 3026	1·5420 7333	7
8	1·4774 5544	1·5073 3977	1·5938 4807	1·6405 0354	8
9	1·5513 2822	1·5866 7344	1·6894 7896	1·7452 1653	9
10	1·6288 9463	1·6701 8257	1·7908 4770	1·8566 1333	10
11	1·7103 3936	1·7580 8692	1·8982 9856	1·9751 2056	11
12	1·7958 5633	1·8506 1781	2·0121 9647	2·1011 9209	12
13	1·8856 4914	1·9480 1874	2·1329 2826	2·2353 1073	13
14	1·9799 3160	2·0505 4605	2 2609 0396	2 3779 9014	14
15	2·0789 2818	2·1584 6952	2 3965 5819	2·5297 7675	15
16	2·1828 7459	2·2720 7318	2·5403 5168	2·6912 5186	16
17	2·2920 1832	2·3916 5598	2·6927 7279	2·8630 3389	17
18	2·4066 1923	2 5175 3261	2·8543 3915	3·0457 8073	18
19	2 5269 5020	2·6500 3433	3·0255 9950	3·2401 9227	19
20	2·6532 9771	2·7895 0982	3·2071 3547	3·4470 1305	20
21	2·7859 6259	2·9363 2612	3·3995 6360	3·6670 3516	21
22	2·9252 6072	3·0908 6960	3·6035 3742	3·9011 0124	22
23	3·0115 2376	3·2535 4695	3·8197 4966	4·1501 0770	23
24	3·2250 9994	3·4247 8626	4·0489 3464	4·4150 0819	24
25	3·3863 5494	3·6050 3817	4·2918 7072	4·6968 1722	25
26	3·5556 7269	3·7947 7702	4·5493 8296	4·9966 1407	26
27	3·7334 5632	3·9945 0213	4·8223 4594	5·3155 4688	27
28	3·9201 2914	4·2047 3909	5·1116 8670	5·6548 3711	28
29	4 1161 3560	4·4260 4114	5·4183 8790	6·0157 8416	29
30	4·3219 4238	4·6589 9068	5·7434 9117	6·3997 7038	30
31	4·5380 3949	4·9042 0071	6 0881 0064	6·8082 6636	31
32	4·7649 4147	5·1623 1654	6·4533 8668	7·2428 3655	32
33	5·0031 8854	5·4340 1741	6·8405 8988	7·7051 4527	33
34	5·2533 4797	5·7200 1883	7·2510 2528	8·1969 6305	34
35	5·5160 1537	6·0210 7192	7·6860 8679	8·7201 7346	35
36	5·7918 1614	6·3379 7044	8·1472 5200	9·2767 8028	36
37	6·0814 0694	6·6715 4784	8·6360 8712	9·8689 1519	37
38	6 3854 7729	6·0226 8193	9·1542 5235	10·4988 4595	38
39	6·7047 5115	7·3922 9677	9·7035 0749	11·1689 8505	39
40	7·0399 8871	7·7813 6502	10·2857 1794	11·8818 9899	40
41	7·3919 8815	8·1909 1055	10·9028 6101	12·6403 1807	41
42	7·7615 8756	8·6220 1110	11·5570 3167	13·4471 4689	42
43	8·1496 6693	9·0758 0116	12·2504 5463	14·3054 7541	43
44	8·5571 5028	9·5534 7491	12·9854 8191	15·2185 9086	44
45	8 9850 0779	10·0562 8938	13·7646 1083	16·1899 9028	45
46	9·4342 5818	10·5855 6777	14·5904 8748	17·2233 9391	46
47	9·9059 7109	11·1427 0291	15·4659 1673	18·3227 5948	47
48	10·4012 6965	11·7291 6096	16·3938 7173	19·4922 9732	48
49	10·9218 3313	12·3464 8522	17·3775 0403	20·7364 8651	49
50	11·4673 9979	12·9963 0023	18·4201 5427	22·0600 9204	50

TABELLE II.

Werte von $v^n = \frac{1}{(1 + i)^n}$, beziehungsweise $w^n = (1 - j)^n$.

n	2% dekursiv	2% antizipativ	2½% dekursiv	2½% antizipativ	3% dekursiv	3% antizipativ	n
1	0·9803 9216	0·98	0·9756 0976	0·975	0·9708 7379	0·97	1
2	·9611 6878	·9604	·9518 1440	·9506 25	·9425 9591	·9409	2
3	·9423 2233	·9411 92	·9285 9941	·9268 5938	·9151 4166	·9126 73	3
4	·9238 4513	·9223 6816	·9059 5064	·9036 8789	·8884 8705	·8852 9281	4
5	·9057 3081	·9039 2080	·8838 5429	·8810 9569	·8626 0878	·8587 3403	5
6	0·8879 7138	0·8858 4238	0·8622 9687	0·8590 6830	0 8374 8426	0·8329 7200	6
7	·8705 6018	·8681 2553	·8412 6524	·8375 9159	·8130 9151	·8079 8284	7
8	·8534 9037	·8507 6302	·8207 4657	·8166 5180	·7894 0923	·7837 4336	8
9	·8367 5527	·8337 4776	·8007 2836	·7962 3551	·7664 1673	·7602 3106	9
10	·8203 4830	·8170 7281	·7811 9840	·7763 2962	·7440 9391	·7374 2413	10
11	0 8042 6304	0·8007 3135	0·7621 4478	0·7569 2138	0·7224 2128	0·7153 0140	11
12	·7884 9318	·7847 1672	·7435 5589	·7379 9835	·7013 7988	·6938 4236	12
13	·7730 3253	·7690 2239	·7254 2038	·7195 4839	·6809 5134	·6730 2709	13
14	·7578 7502	·7536 4194	·7077 2720	·7015 5968	·6611 1781	·6528 3628	14
15	·7430 1473	·7385 6910	·6904 6556	·6840 2069	·6418 6195	·6332 5119	15
16	0·7284 4581	0 7237 9772	0·6736 2493	0·6669 2017	0·6231 6694	0·6142 5365	16
17	·7141 6256	·7093 2177	·6571 9506	·6502 4716	·6050 1645	·5958 2604	17
18	·7001 5937	·6951 3533	·6411 6591	·6339 9099	·5873 9461	·5779 5126	18
19	·6864 3076	·6812 3262	·6255 2772	·6181 4121	·5702 8603	·5606 1272	19
20	·6729 7133	·6676 0797	·6102 7094	·6026 8768	·5536 7575	·5437 9434	20
21	0·6597 7582	0·6542 5581	0·5953 8629	0·5876 2049	0·5375 4928	0·5274 8051	21
22	·6468 3904	·6411 7070	·5808 6467	·5729 2998	·5218 9250	·5116 5610	22
23	·6341 5592	·6283 4728	·5666 9724	·5586 0673	·5066 9175	·4963 0641	23
24	·6217 2149	·6157 8034	·5528 7535	·5446 4156	·4919 3374	·4814 1722	24
25	·6095 3087	·6034 6473	·5393 9059	·5310 2552	·4776 0557	·4669 7471	25
26	0·5975 7928	0·5913 9544	0·5262 3472	0·5177 4988	0·4636 9473	0·4529 6546	26
27	·5858 6204	·5795 6753	·5133 9973	·5048 0613	·4501 8906	·4393 7650	27
28	·5743 7455	·5679 7618	·5008 7778	·4921 8598	·4370 7675	·4261 9521	28
29	·5631 1231	·5566 1665	·4886 6125	·4798 8133	·4243 4636	·4134 0935	29
30	·5520 7089	·5454 8432	·4767 4269	·4678 8430	·4119 8676	·4010 0707	30
31	0·5412 4597	0·5345 7463	0·4651 1481	0·4561 8719	0·3999 8715	0·3889 7686	31
32	·5306 3330	·5238 8314	·4537 7055	·4447 8251	·3883 3703	·3773 0755	32
33	·5202 2873	·5134 0548	·4427 0298	·4336 6295	·3770 2625	·3659 8832	33
34	·5100 2817	·5031 3737	·4319 0534	·4228 2137	·3660 4490	·3550 0867	34
35	·5000 2761	·4930 7462	·4213 7107	·4122 5084	·3553 8340	·3443 5841	35
36	0·4902 2315	0·4832 1313	0·4110 9372	0·4019 4457	0·3450 3243	0·3340 2766	36
37	·4806 1093	·4735 4887	·4010 6705	·3918 9595	·3349 8294	·3240 0683	37
38	·4711 8719	·4640 7789	·3912 8492	·3820 9856	·3252 2615	·3142 8663	38
39	·4619 4822	·4547 9633	3817 4139	·3725 4609	·3157 5355	·3048 5803	39
40	·4528 9042	·4457 0040	·3724 3062	·3632 3244	·3065 5684	·2957 1229	40
41	0·4440 1021	0·4367 8640	0 3633 4695	0·3541 5163	0·2976 2800	0·2868 4092	41
42	·4353 0413	·4280 5067	·3544 8483	·3452 9784	·2889 5922	·2782 3569	42
43	·4267 6875	·4194 8965	·3458 3886	·3366 6539	·2805 4294	·2698 8862	43
44	·4184 0074	·4110 9986	·3374 0376	·3282 4876	·2723 7178	·2617 9196	44
45	·4101 9680	·4028 7786	·3291 7440	·3200 4254	·2644 3862	·2539 3820	45
46	0·4021 5373	0·3948 2031	0·3211 4576	0·3120 4148	0 2567 3653	0·2463 2006	46
47	·3942 6836	·3869 2390	·3133 1294	·3042 4044	·2492 5876	·2389 3046	47
48	·3865 3761	·3791 8542	·3056 7116	·2966 3443	·2419 9880	·2317 6254	48
49	·3789 5844	·3716 0171	·2982 1576	·2892 1857	·2349 5029	·2248 0967	49
50	·3715 2788	·3641 6968	·2909 4221	·2819 8810	·2281 0708	·2180 6538	50

TABELLE II.

Werte von $v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$, beziehungsweise $w^n = (1-j)^n$.

n	3½% dekursiv	3½% antizipativ	4% dekursiv	4% antizipativ	4½% dekursiv	4½% antizipativ	n
1	0 9661 8357	0·965	0·9615 3846	0·96	0·9569 3780	0·955	1
2	·9335 1070	·9312 25	·9245 5621	·9216	·9157 2995	·9120 25	2
3	·9019 4271	·8986 3213	·8889 9636	·8847 36	·8762 9660	·8709 8388	3
4	·8714 4223	·8671 8000	·8548 0419	·8493 4656	·8385 6134	·8317 8960	4
5	·8419 7317	·8368 2870	·8219 2711	·8153 7270	·8024 5105	·7943 5907	5
6	0·8135 0064	0·8075 3970	0·7903 1453	0·7827 5779	0·7678 9574	0·7586 1291	6
7	·7859 9096	·7792 7581	·7599 1781	·7514 4748	·7348 2846	·7244 7533	7
8	·7594 1156	·7520 0115	·7306 9021	·7213 8958	·7031 8513	·6918 7394	8
9	·7337 3097	·7256 8111	·7025 8674	·6925 3400	·6729 0443	·6607 3961	9
10	·7089 1881	·7002 8227	·6755 6417	·6648 3264	·6439 2768	·6310 0633	10
11	0·6849 4571	0·6757 7239	0·6495 8093	0·6382 3933	0·6161 9874	0·6026 1105	11
12	·6617 8330	·6521 2036	·6245 9705	·6127 0976	·5896 6386	·5754 9355	12
13	·6394 0415	·6292 9615	·6005 7409	·5882 0137	·5642 7164	·5495 9634	13
14	·6177 8179	·6072 7078	·5774 7508	·5646 7331	·5399 7286	·5248 6450	14
15	·5968 9062	·5860 1631	·5552 6450	·5420 8638	·5167 2044	·5012 4560	15
16	0·5767 0591	0·5655 0573	0·5339 0818	0·5204 0292	0·4944 6932	0·4786 8955	16
17	·5572 0378	·5457 1303	·5133 7325	·4995 8681	·4731 7639	·4571 4852	17
18	·5383 6114	·5266 1308	·4936 2812	·4796 0334	·4528 0037	·4365 7684	18
19	·2501 5569	·5081 8162	·4746 4242	·4604 1920	·4333 0179	·4169 3088	19
20	·5025 6588	·4903 9526	·4563 8695	·4420 0243	·4146 4286	·3981 6899	20
21	0·4855 7090	0·4732 3143	0·4388 3360	0·4243 2234	0·3967 8743	0·3802 5138	21
22	·4691 5063	·4566 6833	·4219 5539	·4073 4944	·3797 0089	·3631 4007	22
23	·4532 8563	·4406 8494	·4057 2633	·3910 5547	·3633 5013	·3467 9877	23
24	·4379 5713	·4252 6096	·3901 2147	·3754 1325	·3477 0347	·3311 9282	24
25	·4231 4699	·4103 7683	·3751 1680	·3603 9672	·3327 3060	·3162 8915	25
26	0·4088 3767	0·3960 1364	0·3606 8923	0·3459 8085	0·3184 0248	0·3020 5614	26
27	·3950 1224	·3821 5316	·3468 1657	·3321 4161	·3046 9137	·2884 6361	27
28	·3816 5434	·3687 7780	·3334 7747	·3188 5595	·2915 7069	·2754 8275	28
29	·3687 4815	·3558 7058	·3206 5141	·3061 0171	·2790 1502	·2630 8602	29
30	·3562 7841	·3434 1511	·3083 1867	·2938 5764	·2670 0002	·2512 4715	30
31	0·3442 3035	0·3313 9558	0·2964 6026	0·2821 0334	0.2555 0241	0·2399 4103	31
32	·3325 8971	·3197 9674	·2850 5794	·2708 1920	·2444 9991	·2291 4368	32
33	·2313 4271	·3086 0385	·2740 9417	·2599 8644	·2339 7121	·2188 3222	33
34	·3104 7605	·2978 0272	·2635 5209	·2495 8698	·2238 9589	·2089 8477	34
35	·2999 7686	·2873 7962	·2534 1547	·2396 0350	·2142 5444	·1995 8045	35
36	0·2898 3272	0·2773 2133	·2436 6872	0·2300 1936	0·2050 2817	0·1905 9933	36
37	·2800 3161	·2676 1509	·2342 9685	·2208 1858	·1961 9921	·1820 2236	37
38	·2705 6194	·2582 4856	·2252 8543	·2119 8584	·1877 5044	·1738 3136	38
39	·2614 1250	·2492 0986	·2166 2061	·2035 0641	·1796 6549	·1660 0895	39
40	·2525 7247	·2404 8751	·2082 8904	·1953 6615	·1719 2870	·1585 3854	40
41	0·2440 3137	0·2320 7045	0·2002 7793	0·1875 5151	0·1645 2507	0·1514 0431	41
42	·2357 7910	·2239 4799	·1925 7493	·1800 4945	·1574 4026	·1445 9111	42
43	·2278 0590	·2161 0981	·1851 6820	·1728 4747	·1506 6054	·1380 8451	43
44	·2201 0231	·2085 4596	·1780 4635	·1659 3357	·1441 7276	·1318 7071	44
45	·2126 5924	·2012 4685	·1711 9841	·1592 9623	·1379 6437	·1259 3653	45
46	0·2054 6787	0·1942 0321	0·1646 1386	0·1529 2438	0·1320 2332	0·1202 6939	46
47	·1985 1968	·1847 0610	·1582 8250	·1468 0740	·1263 3810	·1148 5726	47
48	·1918 0645	·1808 4689	·1521 9476	·1409 3511	·1208 9771	·1096 8869	48
49	·1853 2024	·1745 1725	·1463 4112	·1352 9770	·1156 9158	·1047 5270	49
50	·1790 5337	·1684 0914	·1407 1262	·1298 8579	·1107 0965	·1000 3882	50

TABELLE II.

Werte von $v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$, beziehungsweise $w^n = (1-j)^n$.

n	5% dekursiv	5% antizipativ	6% dekursiv	6% antizipativ	n
1	0·9523 8095	0·95	0 9433 9623	0·94	1
2	·9070 2948	·9025	·8899 9644	·8836	2
3	·8638 3760	·8573 75	·8396 1928	·8305 84	3
4	·8227 0247	·8145 0625	·7920 9366	·7807 4896	4
5	·7835 2617	·7737 8094	·7472 5817	·7339 0402	5
6	0·7462 1540	0·7350 9189	0 7049 6054	0·6898 6978	6
7	·7106 8133	·6983 3730	·6650 5711	·6484 7759	7
8	·6768 3936	·6634 2043	·6274 1237	·6095 6894	8
9	·6446 0892	·6302 4941	·5918 9846	·5729 9480	9
10	·6139 1325	·5987 3694	·5583 9478	·5386 1511	10
11	0·5846 7929	0·5688 0009	0·5267 8753	0·5062 9821	11
12	·5568 3742	·5403 6009	·4969 6936	·4759 2031	12
13	·5303 2135	·5133 4208	·4688 3902	·4473 6510	13
14	·5050 6795	·4876 7498	·4423 0096	·4205 2319	14
15	·4810 1710	·4632 9123	·4172 6506	·3952 9180	15
16	0 4581 1152	0·4401 2667	0·3936 4628	0·3715 7429	16
17	·4362 9669	·4181 2034	·3713 6442	·3492 7983	17
18	·4155 2065	·3972 1432	·3503 4379	·3283 2304	18
19	·3957 3396	·3773 5360	·3305 1301	·3086 2366	19
20	·3768 8948	·3584 8592	·3118 0473	·2901 0624	20
21	0·3589 4236	0·3405 6163	0 2941 5540	0·2726 9987	21
22	·3418 4987	·3235 3354	·2775 0510	·2563 3787	22
23	·3255 7131	·3073 5687	·2617 9726	·2409 5760	23
24	·3100 6791	·2919 8902	·2469 7855	·2265 0015	24
25	·2953 0277	·2773 8957	·2329 9863	·2129 1014	25
26	0·2812 4073	0·2635 2009	0 2198 1003	0·2001 3553	26
27	·2678 4832	·2503 4409	·2073 6795	·1881 2740	27
28	·2550 9364	·2378 2689	·1956 3014	·1768 3975	28
29	·2429 4632	·2259 3554	·1845 5674	·1662 2937	29
30	·2313 7745	·2146 3876	·1741 1013	·1562 5561	30
31	0·2203 5947	0·2039 0683	0·1642 5484	0·1468 8027	31
32	·2098 6617	·1937 1148	·1549 5740	·1380 6745	32
33	·1998 7254	·1840 2591	·1461 8622	·1297 8341	33
34	·1903 5480	·1748 2461	·1379 1153	·1219 9640	34
35	·1812 9029	·1660 8338	·1301 0522	·1146 7662	35
36	0·1726 5741	0·1577 7921	0·1227 4077	0·1077 9602	36
37	·1644 3563	·1498 9025	·1157 9318	·1013 2826	37
38	·1566 0536	·1423 9574	·1092 3885	·0952 4856	38
39	·1491 4797	·1352 7595	·1030 5552	·0895 3365	39
40	·1420 4568	·1285 1216	·0972 2219	·0841 6163	40
41	0·1352 8160	0·1220 8655	0·0917 1905	0·0791 1193	41
42	·1288 3962	·1159 8222	·0865 2740	·0743 6522	42
43	·1227 0440	·1101 8311	·0816 2962	·0699 0330	43
44	·1168 6133	·1046 7395	·0770 0908	·0657 0911	44
45	·1112 9651	·0994 4026	·0726 5007	·0617 6656	45
46	0·1059 9668	0·0944 6824	0·0685 3781	0·0580 6057	46
47	·1009 4921	·0897 4483	·0646 5831	·0545 7693	47
48	·0961 4211	·0852 5759	·0609 9840	·0513 0232	48
49	·0915 6391	·0809 9471	·0575 4566	·0482 2418	49
50	·0872 0378	·0769 4498	·0542 8836	·0453 3073	50

TABELLE III.

Werte von $s_{\overline{n|}} = \Sigma r^n$, beziehungsweise $\bar{s}_{\overline{n|}} = \Sigma u^n$.

n	2%		2½%		3%		n
	dekursiv	antizipativ	dekursiv	antizipativ	dekursiv	antizipativ	
1	1·02	1·0204 0816	1·025	1·0256 4103	1·03	1·0309 2784	1
2	2·0604	2·0616 4098	2·0756 25	2·0775 8054	2·0909	2·0937 4004	2
3	3·1216 08	3·1241 2345	3·1525 1563	3·1564 9286	3·1836 27	3·1894 2272	3
4	4·2040 4016	4·2082 8924	4·2563 2852	4·2630 6960	4·3091 3581	4·3189 9249	4
5	5·3081 2096	5·3145 8085	5·3877 3673	5·3980 2010	5·4684 0988	5·4834 9741	5
6	6·4342 8338	6·4434 4985	6·5474 3015	6·5620 7190	6·6624 6218	6·6840 1795	6
7	7·5829 6905	7·5953 5699	7·7361 1590	7·7559 7118	7·8923 3605	7·9216 6799	7
8	8·7546 2843	8·7707 7244	8·9545 1880	8·9804 8326	9·1591 0613	9·1975 9587	8
9	9·9497 2100	9·9701 7596	10·2033 8177	10·2363 9309	10·4638 7931	10·5129 8543	9
10	11·1687 1542	11·1940 5710	11·4834 6631	11·5245 0573	11·8077 9569	11·8690 5715	10
11	12·4120 8973	12·4429 1541	12·7955 5297	12·8456 4690	13·1920 2956	13·2670 6922	11
12	13·6803 3152	13·7172 6062	14·1404 4179	14·2006 6349	14·6177 9045	14·7083 1879	12
13	14·9739 3815	15·0176 1288	15·5189 5284	15·5904 2409	16·0863 2416	16·1941 4308	13
14	16·2934 1692	16·3445 0294	16·9319 2666	17·0158 1958	17·5989 1389	17·7259 2070	14
15	17·6392 8525	17·6984 7239	18·3802 2483	18·4777 6368	19·1568 8130	19·3050 7289	15
16	19·0120 7096	19·0800 7386	19·8647 3045	19·9771 9351	20·7615 8774	20·9330 6483	16
17	20·4123 1238	20·4898 7129	21·3863 4871	21·5150 7027	22·4144 3537	22·6114 0704	17
18	21·8405 5863	21·9284 4009	22·9460 0743	23·0923 7976	24·1168 6844	24·3416 5675	18
19	23·2973 6980	23·3963 6744	24·5446 5761	24·7101 3309	25·8703 7449	26·1254 1933	19
20	24·7833 1719	24·8942 5249	26·1832 7405	26·3693 6727	27·6764 8572	27·9643 4982	20
21	26·2989 8354	26·4227 0662	27·8628 5590	28·0711 4592	29·5367 8030	29·8601 5445	21
22	27·8449 6321	27·9823 5369	29·5844 2730	29·8165 5992	31·4528 8370	31·8145 9222	22
23	29·4218 6247	29·5738 3030	31·3490 3798	31·6067 2812	33·4264 7022	33·8294 7652	23
24	31·0302 9972	31·1977 8602	33·1577 6393	33·4427 9808	35·4592 6432	35·9066 7682	24
25	32·6709 0572	32·8548 8370	35·0117 0803	35·3259 4674	37·5530 4225	38·0481 2043	25
26	34·3443 2383	34·5457 9969	36·9120 0073	37·2573 8128	39·7096 3352	40·2557 9426	26
27	36·0512 1031	36·2712 2417	38·8598 0075	39·2383 3977	41·1309 2252	42·5317 4666	27
28	37·7922 3451	38·0318 6140	40·8562 9577	41·2700 9207	44·2188 5020	44·8780 8934	28
29	39·5680 7921	39·8284 3000	42·9027 0316	43·3539 4059	46·5754 1571	47·2969 9932	29
30	41·3794 4079	41·6616 6327	45·0002 7074	45·4912 2111	49·0026 7818	49·7907 2095	30
31	43·2270 2961	43·5323 0945	47·1502 7751	47·6833 0371	51·5027 5852	52·3615 6799	31
32	45·1115 7020	45·4411 3210	49·3540 3445	49·9315 9355	54·0778 4128	55·0119 2576	32
33	47·0338 0160	47·3889 1030	51·6128 8531	52·2375 3184	56·7301 7652	57·7442 5336	33
34	48·9944 7763	49·3764 3908	53·9282 0744	54·6025 9676	59·4620 8181	60·5610 8594	34
35	50·9943 6719	51·4045 2968	56·3014 1263	57·0283 0437	62·2759 4427	63·4650 3705	35
36	53·0342 5453	53·4740 0988	58·7339 4794	59·5162 0961	65·1742 2259	66·4588 0108	36
37	55·1149 3962	55·5857 2436	61·2272 9664	62·0679 0729	68·1594 4927	69·5451 5576	37
38	57·2372 3841	57·7405 3506	63·7829 7906	64·6850 3312	71·2342 3275	72·7269 6470	38
39	59·4019 8318	59·9393 2149	66·4025 5354	67·3992 6471	74·4012 5973	76·0071 8010	39
40	61·6100 2284	62·1829 8112	69·0876 1737	70·1223 2281	77·6632 9753	79·3888 4547	40
41	63·8622 2330	64·4724 2971	71·8398 0781	72·9459 7211	81·0231 9645	82·8750 9842	41
42	66·1594 6777	66·8086 0175	74·6608 0300	75·8420 2268	84·4838 9234	86·4691 7363	42
43	68·5026 5712	69·1924 5076	77·5523 2308	78·8123 3095	88·0484 0911	90·1744 0580	43
44	70·8927 1027	71·6249 4976	80·5161 3116	81·8588 0098	91·7198 6139	93·9942 3278	44
45	73·3305 6447	74·1070 9159	83·5540 3443	84·9833 8562	95·5014 5723	97·9321 9875	45
46	75·8171 7576	76·6398 8938	86·6678 8530	88·1880 8781	99·3965 0095	101·9919 5747	46
47	78·3535 1927	79·2243 7691	89·8595 8243	91·4749 6186	103·4083 9598	106·1772 7574	47
48	80·9405 8966	81·8616 0910	93·1310 7199	94·8461 1473	107·5406 4785	110·4920 3685	48
49	83·5794 0145	84·5526 6234	96·4843 4879	98·3037 0741	111·7968 6729	114·9402 4417	49
50	86·2709 8948	87·2986 3504	99·9214 5751	101·8499 5632	116·1807 7391	119·5260 2492	50

TABELLE III.

Werte von $s_{\overline{n|}} = \Sigma r^n$, beziehungsweise $\bar{s}_{\overline{n|}} = \Sigma u^n$.

n	3½%		4%		4½%		n
	dekursiv	antizipativ	dekursiv	antizipativ	dekursiv	antizipativ	
1	1·035	1·0362 6943	1·04	1·0416 6667	1·045	1·0471 2042	1
2	2·1062 25	2·1101 2376	2·1216	2·1267 3611	2·1370 25	2·1435 8159	2
3	3·2149 4288	3·2229 2618	3·2464 64	3·2570 1678	3·2781 9113	3·2917 0847	3
4	4·3624 6588	4·3760 8930	4·4163 2256	4·4343 9248	4·4707 0973	4·4939 3557	4
5	5·5501 5218	5·5710 7700	5·6329 7546	5·6608 2550	5·7168 9166	5·7528 1212	5
6	6·7794 0751	6·8094 0622	6·8982 9148	6·9383 5990	7·0191 5179	7·0710 0745	6
7	8·0516 8677	8·0926 4893	8·2142 2626	8·2691 2489	8·3800 1362	8·4513 1670	7
8	9·3684 9581	9·4224 3412	9·5827 9531	9·6553 3843	9·8021 1423	9·8966 6671	8
9	10·7313 9316	10·8004 4987	11·0061 0712	11·0993 1087	11·2882 0937	11·4101 2221	9
10	12·1419 9192	12·2284 4546	12·4863 5141	12·6034 4882	12·8411 7879	12·9948 9236	10
11	13·6019 6164	13·7082 3364	14·0258 0546	14·1702 5919	14·4640 3184	14·6543 3755	11
12	15·1130 3030	15·2416 9289	15·6268 3768	15·8023 5332	16·1599 1327	16·3919 7649	12
13	16·6769 8636	16·8307 6983	17·2919 1119	17·5024 5137	17·9321 0937	18·2114 9371	13
14	18·2956 8088	18·4774 8169	19·0235 8764	19·2733 8685	19·7840 5429	20·1167 4734	14
15	19·9710 2971	20·1839 1885	20·8245 3114	21·1181 1130	21·7193 3673	22·1117 7732	15
16	21·7050 1575	21·9522 4751	22·6975 1239	23·0396 9927	23·7417 0689	24·2008 1395	16
17	23·4996 9130	23·7847 1245	24·6454 1288	25·0413 5341	25·8550 8370	26·3882 8686	17
18	25·3571 8050	25·6836 3984	26·6712 2940	27·1264 0980	28·0635 6246	28·6788 3441	18
19	27·2796 8181	27·6514 4025	28·7780 7858	29·2983 4354	30·3714 2277	31·0773 1351	19
20	29·2694 7068	29·6906 1166	30·9692 0172	31·5607 7452	32·7831 3680	33·5888 0996	20
21	31·3289 0215	31·8037 4265	33·2479 6979	33·9174 7346	35·3033 7795	36·2186 4917	21
22	33·4604 1373	33·9935 1570	35·6178 8858	36·3723 6819	37·9370 2996	38·9724 0751	22
23	35·6665 2821	36·2627 1057	38·0826 0412	38·9295 5019	40·6891 9631	41·8559 2410	23
24	37·9498 5669	38·6142 0785	40·6459 0829	41·5932 8145	43·5652 1015	44·8753 1319	24
25	40·3131 0168	41·0509 9259	43·3117 4462	44·3680 0151	46·5706 4460	48·0369 7716	25
26	42·7590 6074	43·5761 5812	46·0842 1440	47·2583 3490	49·7113 2361	51·3476 2007	26
27	45·2906 2784	46·1929 0997	48·9675 8298	50·2690 9886	52·9933 3317	54·8142 6185	27
28	47·9107 9930	48·9045 6992	51·9662 8630	53·4053 1132	56·4230 3316	58·4442 5325	28
29	50·6226 7728	51·7145 8023	55·0849 3775	56·6721 9929	60·0070 6966	62·2452 9136	29
30	53·4294 7098	54·6265 0801	58·3283 3526	60·0752 0759	63·7523 8779	66·2254 3598	30
31	56·3345 0247	57·6440 4975	61·7014 6867	63·6200 0791	67·6662 4524	70·3931 2668	31
32	59·3412 1005	60·7710 3601	65·2095 2742	67·3125 0824	71·7562 2628	74·7572 0071	32
33	62·4531 5240	64·0114 3628	68·8579 0851	71·1588 6275	76·0302 5646	79·3269 1174	33
34	65·6740 1274	67·3693 6402	72·6522 2486	75·1654 8203	80·4966 1800	84·1119 4946	34
35	69·0076 0318	70·8490 8189	76·5983 1385	79·3390 4378	85·1639 6581	89·1224 6017	35
36	72·4578 6930	74·4550 0714	80·7022 4640	83·6865 0394	90·0413 4427	94·3690 6824	36
37	76·0288 9472	78·1917 1724	84·9703 3626	88·2151 0827	95·1382 0476	99·8628 9868	37
38	79·7249 0604	82·0639 5569	89·4091 4971	92·9324 0444	100·4644 2398	105·6156 0071	38
39	83·5502 7775	86·0766 3802	94·0255 1570	97·8462 5463	106·0303 2306	111·6393 7247	39
40	87·5095 3747	90·2348 5805	98·8265 3633	102·9648 4857	111·8466 8700	117·9469 8688	40
41	91·6073 7128	94·5438 9435	103·8195 9778	108·2967 1726	117·9247 8854	124·5518 1873	41
42	95·8486 2928	99·0092 1695	109·0123 8169	113·8507 4715	124·2764 0402	131·4678 7301	42
43	100·2383 3130	103·6364 9424	114·4128 7696	119·6361 9495	130·9138 4220	138·7098 1467	43
44	104·7816 7290	108·4316 0025	120·0293 9204	125·6627 0307	137·8499 6510	146·2929 9966	44
45	109·4840 3145	113·4006 2202	125·8705 6772	131·9403 1570	145·0982 1353	154·2335 0749	45
46	114·3509 7255	118·5498 6738	131·9453 9043	138·4794 9552	152·6726 3314	162·5481 7539	46
47	119·3882 5659	123·8858 7293	138·2632 0604	145·2911 4117	160·5879 0163	171·2546 3391	47
48	124·6018 4557	129·4154 1237	144·8337 3429	152·3866 0538	168·8593 5720	180·3713 4441	48
49	129·9979 1016	135·1455 0504	151·6670 8366	159·7777 1394	177·5030 2828	189·9176 3813	49
50	135·5828 3702	141·0834 2492	158·7737 6700	167·4767 8535	186·5356 6455	199·9137 5720	50

TABELLE III.

Werte von $s_{\overline{n}|} = \Sigma r^n$, beziehungsweise $\bar{s}_{\overline{n}|} = \Sigma u^n$.

n	5% dekursiv	5% antizipativ	6% dekursiv	6% antizipativ	n
1	1·05	*1·0526 3158*	1·06	*1·0638 2979*	1
2	2·1525	*2·1606 6482*	2·1836	*2·1955 6360*	2
3	3·3101 25	*3·3270 1560*	3 3746 16	*3·3995 3575*	3
4	4·5256 3125	*4·5547 5326*	4·6370 9296	*4·6803 5718*	4
5	5·8019 1281	*5·8471 0870*	5·9753 1854	*6·0429 3317*	5
6	7·1420 0845	*7·2074 8284*	7·3938 3765	*7·4924 8209*	6
7	8·5491 0888	*8·6394 5562*	8·8974 6791	*9·0345 5542*	7
8	10·0265 6432	*10·1467 9539*	10·4913 1598	*10·6750 5896*	8
9	11·5778 9254	*11·7334 6883*	12·1807 9494	*12·4202 7549*	9
10	13·2067 8716	*13·4036 5140*	13·9716 4264	*14·2768 8882*	10
11	14·9171 2652	*15·1617 3832*	15·8699 4120	*16·2520 0938*	11
12	16·7129 8285	*17·0123 5612*	17·8821 3767	*18·3532 0147*	12
13	18·5986 3199	*18·9603 7487*	20·0150 6593	*20·5885 1220*	13
14	20·5785 6359	*21·0109 2091*	22·2759 6988	*22·9665 0234*	14
15	22·6574 9177	*23·1693 9044*	24·6725 2808	*25·4962 7908*	15
16	24·8403 6636	*25·4414 6362*	27·2128 7976	*28·1875 3094*	16
17	27·1323 8467	*27·8331 1960*	29·9056 5255	*31·0505 6483*	17
18	29·5390 0391	*30·3506 5221*	32·7599 9170	*34·0963 4556*	18
19	32·0659 5410	*33·0006 8653*	35·7855 9120	*37·3365 3783*	19
20	34·7192 5181	*35·7901 9635*	38·9927 2668	*40·7835 5089*	20
21	37·5052 1440	*38·7265 2247*	42·3922 9028	*44·4505 8605*	21
22	40·4304 7512	*41·8173 9208*	45·9958 2769	*48·3516 8729*	22
23	43·5019 9887	*45·0709 3903*	49·8155 7735	*52·5017 9499*	23
24	46·7270 9882	*48·4957 2529*	53·8645 1200	*56·9168 0318*	24
25	50·1134 5376	*52·1007 6347*	58·1563 8272	*61·6136 2040*	25
26	53·6691 2645	*55·8955 4049*	62·7057 6568	*66·6102 3447*	26
27	57·4025 8277	*59·8900 4262*	67·5281 1162	*71·9257 8135*	27
28	61·3227 1191	*64·0947 8171*	72·6397 9832	*77·5806 1846*	28
29	65·4388 4750	*68·5208 2285*	78·0581 8622	*83·5964 0261*	29
30	69·7607 8988	*73·1798 1353*	83·8016 7739	*89·9961 7299*	30
31	74·2988 2937	*78·0840 1424*	89·8897 7803	*96·8044 3936*	31
32	79·0637 7084	*83·2463 3078*	96·3431 6471	*104·0472 7591*	32
33	84·0669 5938	*88·6803 4819*	103·1837 5460	*111·7524 2118*	33
34	89·3203 0735	*94·4003 6651*	110·4347 7987	*119·9493 8424*	34
35	94·8363 2272	*100·4214 3844*	118·1208 6666	*128·6695 5770*	35
36	100·6281 3886	*106·7594 0888*	126·2681 1866	*137·9463 3798*	36
37	106·7095 4580	*113·4309 5672*	134·9042 0578	*147·8152 5317*	37
38	113·0950 2309	*120·4536 3865*	144·0584 5813	*158·3140 9911*	38
39	119·7997 7424	*127·8459 3542*	153 7619 6562	*169·4830 8416*	39
40	126·8397 6295	*135·6273 0044*	164·0476 8356	*181·3649 8315*	40
41	134·2317 5110	*143·8182 1099*	174·9505 4457	*194·0053 0122*	41
42	141·9933 3866	*152·4402 2209*	186·5075 7724	*207·4524 4811*	42
43	150 1430 0559	*161·5160 2326*	198 7580 3188	*221·7579 2352*	43
44	158·7001 5587	*171·0694 9817*	211·7435 1379	*236·9765 1439*	44
45	167·6851 6366	*181·1257 8754*	225·5081 2462	*253·1665 0467*	45
46	177·1194 2185	*191·7113 5531*	240·0986 1210	*270·3898 9858*	46
47	187·0253 9294	*202 8540 5822*	255·5645 2882	*288·7126 5806*	47
48	197·4266 6259	*214·5832 1918*	271·9584 0055	*308·2049 5539*	48
49	208·3479 9572	*226·9297 0440*	289·3359 0458	*328·9414 4190*	49
50	219·8153 9550	*239·9260 0463*	307·7560 5886	*351·0015 3394*	50

TABELLE IV.

Werte von $a_{\overline{n}|} = \Sigma v^n$, beziehungsweise $\bar{a}_{\overline{n}|} = \Sigma w^n$.

n	2% dekursiv	2% antizipativ	2½% dekursiv	2½% antizipativ	3% dekursiv	3% antizipativ	n
1	0·9803 9216	*0 98*	0·9756 0976	*0·975*	0·9708 7379	*0·97*	1
2	1·9415 6094	*1·9404*	1·9274 2415	*1·9256 25*	1·9134 6970	*1·9109*	2
3	2·8838 8327	*2·8815 92*	2 8560 2356	*2·8524 8438*	2·8286 1135	*2·8235 73*	3
4	3·8077 2870	*3·8039 6016*	3·7619 7421	*3·7561 7227*	3·7170 9840	*3·7088 6581*	4
5	4·7134 5951	*4·7078 8096*	4·6458 2850	*4·6372 6796*	4·5797 0719	*4·5675 9984*	5
6	5·6014 3089	*5·5937 2334*	5·5081 2536	*5·4963 3626*	5 4171 9144	*5·4005 7184*	6
7	6·4719 9107	*6·4618 4887*	6·3493 9060	*6·3339 2785*	6·2302 8296	*6·2085 5469*	7
8	7·3254 8144	*7·3126 1189*	7·1701 3717	*7·1505 7966*	7·0196 9219	*6·9922 9804*	8
9	8·1622 3671	*8·1463 5966*	7·9708 6553	*7·9468 1517*	7·7861 0892	*7·7525 2910*	9
10	8·9825 8501	*8·9634 3246*	8 7520 6393	*8·7231 4479*	8·5302 0284	*8·4899 5323*	10
11	9·7868 4805	*9·7641 6381*	9·5142 0871	*9·4800 6617*	9·2526 2411	*9·2052 5463*	11
12	10·5753 4122	*10·5488 8054*	10·2577 6460	*10·2180 6451*	9·9540 0399	*9·8990 9699*	12
13	11·3483 7375	*11·3179 0293*	10·9831 8497	*10·9376 1290*	10·6349 5533	*10·5721 2408*	13
14	12·1062 4877	*12·0715 4487*	11·6909 1217	*11·6391 7258*	11·2960 7314	*11·2249 6036*	14
15	12·4892 6350	*12·8101 1397*	12·3813 7773	*12·3231 9326*	11·9379 3509	*11·8582 1155*	15
16	13·5777 0931	*13·5339 1169*	13·0550 0266	*12·9901 1343*	12·5611 0203	*12·4724 6520*	16
17	14·2918 7188	*14·2432 3346*	13·7121 9772	*13·6403 6060*	13·1661 1847	*13·0682 9125*	17
18	14·9920 3125	*14·9383 6879*	14·3533 6363	*14·2743 5158*	13·7535 1308	*13·6462 4251*	18
19	15·6784 6201	*15·6196 0141*	14·9788 9134	*14·8924 9279*	14 3237 9911	*14·2068 5524*	19
20	16·3514 3334	*16·2872 0938*	15·5891 6229	*15·4951 8047*	14·8774 7486	*14·7506 4958*	20
21	17·0112 0916	*16·9414 6520*	16·1845 4857	*16·0828 0096*	15·4150 2414	*15·2781 3009*	21
22	17·6580 4820	*17·5826 3589*	16·7654 1324	*16·6557 3094*	15·9369 1664	*15·7897 8619*	22
23	18·2922 0412	*18·2109 8317*	17 3321 1048	*17·2143 3766*	16·4436 0839	*16·2860 9260*	23
24	18·9139 2560	*18·8267 6351*	17·8849 8583	*17·7589 7922*	16·9355 4212	*16·7675 0983*	24
25	19·5234 5647	*19·4302 2824*	18 4243 7642	*18·2900 0474*	17·4131 4769	*17·2344 8453*	25
26	20·1210 3576	*20·0216 2368*	18 9506 1114	*18·8077 5462*	17·8768 4242	*17·6874 4999*	26
27	20·7068 9780	*20·6011 9120*	19·4640 1087	*19·3125 6076*	18·3270 3147	*18·1268 2650*	27
28	21·2812 7236	*21·1691 6738*	19·9648 8866	*19·8047 4674*	18·7641 0823	*18·5530 2170*	28
29	21·8443 8466	*21·7257 8403*	20 4535 4991	*20·2846 2807*	19 1884 5459	*18·9664 3105*	29
30	22·3964 5555	*22·2712 6835*	20·9302 9259	*20·7525 1237*	19·6004 4135	*19·3674 3812*	30
31	22·9377 0152	*22·8058 4298*	21·3954 0741	*21·2086 9956*	20·0004 2849	*19.7564 1497*	31
32	23·4683 3482	*23·3297 2612*	21·8491 7796	*21·6534 8207*	20·3887 6553	*20·1337 2252*	32
33	23·9885 6355	*23·8431 3160*	22·2918 8094	*22·0871 4502*	20·7657 9178	*20·4997 1085*	33
34	24·4985 9172	*24·3462 6897*	22·7237 8628	*22·5099 6639*	21·1318 3668	*20·8547 1952*	34
35	24·9986 1933	*24·8393 4359*	23·1451 5734	*22·9222 1723*	21·4872 2007	*21·1990 7794*	35
36	25·4888 4248	*25·3225 5672*	23·5562 5107	*23·3241 6180*	21·8322 5250	*21·5331 0569*	36
37	25·9694 5341	*25·7961 0558*	23·9573 1812	*23·7160 5776*	22·1672 3544	*21·8571 1243*	37
38	26·4406 4060	*26·2601 8347*	24·3486 0304	*24·0981 5631*	22·4924 6159	*22·1713 9906*	38
39	26·9025 8883	*26·7149 7980*	24·7303 4443	*24·4707 0240*	22 8082 1513	*22·4762 5709*	39
40	27·3554 7924	*27·1606 8021*	25·1027 7505	*24·8339 3484*	23·1147 7197	*22·7719 6937*	40
41	27·7991 8945	*27·5974 6660*	25·4661 2200	*25·1880 8647*	23·4123 9997	*23·0588 1029*	41
42	28·2347 9358	*28·0255 1727*	25·8206 0683	*25·5333 8431*	23·7013 5920	*23·3370 4598*	42
43	28·6615 6233	*28·4150 0692*	26·1664 4569	*25·8700 4970*	23·9819 0213	*23·6069 3460*	43
44	29 0799 6307	*28·8561 0679*	26·5038 4945	*26·1982 9846*	24 2542 7392	*23·8687 2657*	44
45	29·4901 5987	*29·2589 8465*	26·8330 2386	*26·5183 4100*	24·5187 1254	*24·1226 6477*	45
46	29·8923 1360	*29·6538 0496*	27·1541 6962	*26·8303 8217*	24·7754 4907	*24·3689 8483*	46
47	30·2865 8196	*30·0407 2886*	27·4674 8255	*27·1346 2291*	25·0247 0783	*24·6079 1528*	47
48	30 6731 1957	*30·4199 1428*	27·7731 5371	*27·4312 5734*	25·2667 0664	*24·8396 7782*	48
49	31·0520 7801	*30·7915 1600*	28·0713 6947	*27·7204 7591*	25·5016 5693	*25·0644 8749*	49
50	31·4236 0589	*31·1556 8568*	28·3623 1168	*28·0024 6401*	25·7297 6401	*25·2825 5286*	50

TABELLE IV.

Werte von $a_{\overline{n}|} = \Sigma v^n$, beziehungsweise $\bar{a}_{\overline{n}|} = \Sigma w^n$.

n	3½% dekursiv	3½% antizipativ	4% dekursiv	4% antizipativ	4½% dekursiv	4½% antizipativ	n
1	0·9661 8357	0·965	0·9615 3846	0·96	0·9569 3780	0·955	1
2	1·8996 9428	1·8962 25	1·8860 9467	1·8816	1·8726 6775	1·8670 25	2
3	2·8016 3698	2·7948 5713	2·7750 9103	2·7663 36	2·7489 6435	2·7380 0888	3
4	3·6730 7921	3·6620 3713	3·6298 9522	3·6156 8256	3 5875 2570	3·5697 9848	4
5	4·5150 5238	4·4988 6583	4·4518 2233	4·4310 5526	4·3899 7674	4·3641 5754	5
6	5·3285 5302	5·3064 0552	5·2421 3686	5·2138 1305	5·1578 7248	5·1227 7045	6
7	6·1145 4398	6·0856 8133	6 0020 5467	5·9652 6053	5·8927 0094	5 8472 4578	7
8	6·8739 5554	6·8376 8248	6·7327 4487	6 6866 5010	6·5958 8607	6·5391 1972	8
9	7·6076 8651	7·5633 6360	7·4353 3161	7·3791 8410	7 2687 9050	7·1998 5934	9
10	8·3166 0532	8·2636 4587	8·1108 9578	8·0440 1674	7·9127 1818	7·8308 6567	10
11	9·0015 5104	8·9394 1826	8·7604 7671	8·6822 5607	8 5289 1692	8·4334 7671	11
12	9·6633 3433	9·5915 3863	9·3850 7376	9·2949 6582	9·1185 8078	9·0089 7026	12
13	10·3027 3849	10·2208 3477	9·9856 4785	9·8831 6719	9·6828 5242	9·5585 6660	13
14	10·9205 2028	10·8281 0556	10·5631 2293	10·4478 4050	10·2228 2528	10·0834 3110	14
15	11·5174 1090	11·4141 2186	11·1183 8743	10·9899 2688	10·7395 4573	10·5846 7670	15
16	12·0941 1681	11·9796 2760	11·6522 9561	11·5103 2981	11·2340 1505	11·0633 6625	16
17	12·6513 2059	12·5253 4063	12·1656 6885	12·0099 1662	11·7071 9143	11·5205 1477	17
18	13 1896 8173	13·0519 5371	12·6592 9697	12·4895 1995	12·1599 9180	11·9570 9160	18
19	13·7098 3742	13·5601 3533	13·1339 3940	12·9499 3915	12·5932 9359	12·3740 2248	19
20	14 2124 0330	14·0505 3059	13·5903 2634	13·3919 4159	13·0079 3645	12·7721 9147	20
21	14·6979 7420	14·5237 6202	14·0291 5995	13·8162 6392	13·4047 2388	13·1524 4285	21
22	15·1671 2484	14·9804 3035	14·4511 1533	14·2236 1337	13·7844 2476	13·5155 8293	22
23	15·6204 1047	15·4211 1529	14·8568 4167	14·6146 6883	14·1477 7489	13·8623 8169	23
24	16·0583 6760	15·8463 7625	15·2469 6314	14·9900 8208	14·4954 7837	14·1935 7452	24
25	16·4815 1459	16·2567 5308	15·6220 7994	15·3504 7880	14·8282 0896	14·5098 6366	25
26	16·8903 5226	16·6527 6673	15·9827 6918	15·6964 5964	15·1466 1145	14·8119 1980	26
27	17·2853 6451	17·0349 1989	16·3295 8575	16·0286 0126	15·4513 0282	15·1003 8341	27
28	17·6670 1885	17·4036 9769	16·6630 6322	16·3474 5721	15·7428 7351	15·3758 6616	28
29	18·0357 6700	17·7595 6828	16·9837 1463	16·6535 5892	16·0218 8853	15·6389 5218	29
30	18·3920 4541	18·1029 8339	17·2920 3330	16·9474 1656	16 2888 8854	15·8901 9933	30
31	18·7362 7576	18·4343 7897	17·5884 9356	17·2295 1990	16·5443 9095	16·1301 4036	31
32	19·0688 6547	18·7541 7570	17·8735 5150	17·5003 3910	16·7888 9086	16·3592 8404	32
33	19·3902 0818	19·0627 7955	18·1476 4567	17·7603 2554	17 0228 6207	16·5781 1626	33
34	19·7006 8323	19·3605 8227	18·4111 9776	18 0099 1252	17·2467 5796	16·7871 0103	34
35	20·0006 6110	19·6479 6189	18·6646 1323	18·2495 1602	17·4610 1240	16·9866 8148	35
36	20·2904 9381	19·9252 8322	18 9082 8195	18·4795 3538	17·6660 4058	17·1772 8082	36
37	20·5705 2542	20·1928 9831	19·1425 7880	18·7003 5396	17·8622 3979	17·3593 0318	37
38	20·8410 8736	20·4511 4687	19·3678 6423	18·9123 3980	18·0499 9023	17·5331 3454	38
39	21·1024 9987	20·7003 5673	19·5844 8484	19·1158 4621	18·2296 5572	17 6991 4348	39
40	21·3550 7234	20·9408 4424	19·7927 7388	19·3112 1236	18·4015 8442	17·8576 8203	40
41	21·5991 0371	21·1729 1470	19·9930 5181	19·4987 6387	18·5661 0949	18·0090 8634	41
42	21·8348 8281	21·3968 6268	20·1856 2674	19·6788 1331	18·7235 4975	18·1536 7745	42
43	22·0626 8870	21·6129 7249	20·3707 9494	19·8516 6078	18·8742 1029	18·2917 6196	43
44	22·2827 9102	21·8215 1845	20·5488 4129	20·0175 9435	19·0183 8305	18·4236 3268	44
45	22·4954 5026	22·0227 6530	20·7200 3970	20·1768 9058	19·1563 4742	18·5495 6921	45
46	22·7009 1813	22·2169 6852	20·8846 5356	20·3298 1495	19·2883 7074	18·6698 3859	46
47	22 8994 3780	22·4043 7462	21·0429 3612	20 4766 2235	19·4147 0884	18·7846 9586	47
48	23·0912 4425	22·5852 2151	21·1951 3088	20·6175 5746	19·5356 0654	18·8943 8454	48
49	23 2765 6450	22·7597 3876	21·3414 7200	20·7528 5516	19·6512 9813	18·9991 3724	49
50	23·4556 1787	22·9281 4790	21·4821 8462	20·8827 4096	19·7620 0778	19·0991 7606	50

TABELLE IV.

Werte von $a_{\overline{n}|} = \Sigma v^n$, beziehungsweise $\bar{a}_{\overline{n}|} = \Sigma w^n$.

n	5% dekursiv	5% antizipativ	6% dekursiv	6% antizipativ	n
1	0·9523 8095	0·95	0·9433 9623	0·94	1
2	1·8594 1043	1·8525	1·8333 9267	1·8236	2
3	2·7232 4803	2·7098 75	2·6730 1195	2·6541 84	3
4	3·5459 5050	3·5243 8125	3·4651 0561	3·4349 3296	4
5	4·3294 7667	4·2981 6219	4·2123 6379	4·1688 3698	5
6	5·0756 9206	5·0332 5408	4·9173 2433	4·8587 0676	6
7	5·7863 7340	5·7315 9137	5·5823 8144	5·5071 8436	7
8	6·4632 1276	6·3950 1181	6·2097 9381	6·1167 5330	8
9	7·1078 2168	7·0252 6122	6·8016 9227	6·6897 4810	9
10	7·7217 3493	7·6239 9815	7·3600 8705	7·2283 6321	10
11	8·3064 1422	8·1927 9825	7·8868 7458	7·7346 6142	11
12	8·8632 5164	8·7331 5833	8·3838 4394	8·2105 8173	12
13	9·3935 7299	9·2465 0042	8·8526 8296	8·6579 4683	13
14	9 8986 4094	9·7341 7540	9·2949 8393	9·0784 7002	14
15	10·3796 5804	10·1974 6663	9·7122 4899	9·4737 6182	15
16	10·8377 6956	10·6375 9330	10·1058 9527	9·8453 3611	16
17	11·2740 6625	11·0557 1363	10·4772 5969	10·1946 1594	17
18	11·6895 8690	11·4529 2795	10·8276 0348	10·5229 3899	18
19	12·0853 2086	11·8302 8155	11·1581 1649	10·8315 6265	19
20	12·4622 1034	12·1887 6747	11·4699 2122	11·1216 6889	20
21	12·8211 5271	12·5293 2910	11·7640 7662	11·3943 6876	21
22	13·1630 0258	12·8528 6265	12·0415 8172	11·6507 0663	22
23	13·4885 7388	13·1602 1951	12·3033 7898	11·8916 6423	23
24	13·7986 4179	13·4522 0854	12·5503 5753	12·1181 6438	24
25	14 0939 4457	13·7295 9811	12·7833 5616	12·3310 7452	25
26	14·3751 8530	13·9931 1821	13·0031 6619	12·5312 1004	26
27	14·6430 3362	14·2434 6229	13·2105 3414	12·7193 3744	27
28	14·8981 2726	14·4812 8918	13·4061 6428	12·8961 7720	28
29	15·1410 7358	14·7072 2472	13·5907 2102	13·0624 0656	29
30	15·3724 5103	14·9218 6349	13·7648 3115	13·2186 6217	30
31	15·5928 1050	15·1257 7031	13·9290 8599	13·3655 4244	31
32	15·8026 7667	15·3194 8180	14·0840 4339	13·5036 0989	32
33	16·0025 4921	15·5035 0771	14·2302 2961	13·6333 9330	33
34	16·1929 0401	15·6783 3232	14·3681 4114	13·7553 8970	34
35	16·3741 9429	15·8444 1570	14·4982 4636	13·8700 6632	35
36	16·5468 5171	16·0021 9492	14·6209 8713	13·9778 6234	36
37	16·7112 8734	16·1520 8517	14·7367 8031	14·0791 9060	37
38	16 8678 9271	16·2944 8091	14·8460 1916	14·1744 3916	38
39	17·0170 4067	16·4297 5687	14·9490 7468	14·2639 7281	39
40	17·1590 8635	16·5582 6903	15·0462 9687	14·3481 3445	40
41	17·2943 6796	16·6803 5557	15·1380 1592	14·4272 4638	41
42	17·4232 0758	16·7963 3780	15·2245 4332	14·5016 1160	42
43	17·5459 1198	16·9065 2091	15·3061 7294	14·5715 1490	43
44	17·6627 7331	17·0111 9486	15·3831 8202	14·6372 2401	44
45	17·7740 6982	17·1106 3512	15·4558 3209	14·6989 9057	45
46	17·8800 6650	17·2051 0336	15·5243 6990	14·7570 5113	46
47	17·9810 1571	17·2948 4819	15·5890 2821	14·8116 2806	47
48	18·0771 5782	17·3801 0578	15·6500 2661	14·8629 3038	48
49	18·1687 2173	17·4611 0049	15·7075 7227	14·9111 5456	49
50	18·2559 2546	17·5380 4547	15·7618 6064	14·9564 8528	50

TABELLE V.

Werte von $\frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{\Sigma v^n}$, beziehungsweise $\frac{w}{\bar{a}_{\overline{n|}}} = \frac{w}{\Sigma w^n}$.

n	2%		2½%		3%		n
	dekursiv	antizipativ	dekursiv	antizipativ	dekursiv	antizipativ	
1	1·02	1	1·025	1	1·03	1	1
2	0·5150 4950	0·5050 5051	0·5188 2716	0·5063 2911	0·5226 1084	0·5076 1421	2
3	·3467 5467	·3400 8978	·3501 3717	·3418 0731	·3535 3036	·3435 3636	3
4	·2626 2375	·2576 2625	·2658 1788	·2595 7276	·2690 2705	·2615 3548	4
5	·2121 5839	·2081 6159	·2152 4686	·2102 5310	·2183 5457	·2123 6536	5
6	0·1785 2581	0·1751 9636	0·1815 4997	0·1773 9090	0·1845 9750	0·1796 1061	6
7	·1545 1196	·1516 5938	·1574 9543	·1539 3292	·1605 0635	·1562 3604	7
8	·1365 0980	·1340 1504	·1394 6735	·1363 5258	·1424 5639	·1387 2406	8
9	·1225 1544	·1202 9914	·1254 5689	·1226 9066	·1284 3386	·1251 2016	9
10	·1113 2653	·1093 3311	·1142 5877	·1117 7162	·1172 3051	·1142 5269	10
11	0·1021 7794	0·1003 6701	0·1051 0596	0·1028 4739	0·1080 7745	0·1053 7460	11
12	·0945 5960	·0929 0085	·0974 8713	·0954 1924	·1004 6209	·0979 8874	12
13	·0881 1835	·0865 8848	·0910 4827	·0891 4194	·0940 2954	·0917 5072	13
14	·0826 0197	·0811 8265	·0855 3653	·0837 6884	·0885 2634	·0864 1456	14
15	·0778 2547	·0765 0205	·0807 6646	·0791 1911	·0837 6658	·0817 9986	15
16	0·0736 5013	0·0724 1070	0·0765 9899	0·0750 5708	0·0796 1085	0·0777 7131	16
17	·0699 6984	·0688 0460	·0729 2777	·0714 7904	·0759 5253	·0742 2547	17
18	·0667 0210	·0656 0288	·0696 7008	·0683 0433	·0727 0870	·0710 8184	18
19	·0637 8177	·0627 4168	·0667 6062	·0654 6923	·0698 1388	·0682 7690	19
20	·0611 5672	·0601 6991	·0641 4713	·0629 2280	·0672 1571	·0657 5982	20
21	0·0587 8477	0·0578 4623	0·0617 8733	0·0606 2376	0·0648 7178	0·0634 8945	21
22	·0566 3140	·0557 3680	·0596 4660	·0585 3841	·0627 4739	·0614 3212	22
23	0546 6810	·0538 1368	·0576 9638	·0566 3883	·0608 1390	·0595 6002	23
24	·0528 7110	·0520 5355	·0559 1282	·0549 0180	·0590 4742	·0578 4997	24
25	·0512 2044	·0504 3688	·0542 7592	·0533 0780	·0574 2787	·0562 8251	25
26	0·0496 9923	0·0489 4708	0·0527 6875	0·0518 4032	0·0559 3829	0·0548 4114	26
27	·0482 9309	·0475 7006	·0513 7687	·0504 8528	·0545 6421	·0535 1185	27
28	·0469 8967	·0462 9374	·0500 8793	·0492 3063	·0532 9323	·0522 8259	28
29	·0457 7835	·0451 0769	·0488 9127	·0480 6595	·0521 1467	·0511 4299	29
30	·0446 4992	·0440 0288	·0477 7764	·0469 8227	·0510 1926	·0500 8406	30
31	0·0435 9635	0·0429 7144	0·0467 3900	0·0459 7170	0·0499 9893	0·0490 9798	31
32	·0426 1061	·0420 0649	·0457 6831	·0450 2740	·0490 4662	·0481 7788	32
33	·0416 8653	·0411 0198	·0448 5938	·0441 4332	·0481 5612	·0473 1774	33
34	·0408 1867	·0402 5258	·0440 0675	·0433 1415	·0473 2196	·0465 1225	34
35	·0400 0221	·0394 5354	·0432 0558	·0425 3516	·0465 3929	·0457 5674	35
36	0·0392 3285	0·0387 0067	0·0424 5158	0·0418 0215	0·0458 0379	0·0450 4692	36
37	·0385 0678	·0379 9023	·0417 4090	·0411 1138	0451 1162	·0443 7915	37
38	0378 2057	·0373 1886	·0410 7012	·0404 5953	·0444 5934	·0437 5006	38
39	·0371 7114	·0366 8354	·0404 3615	·0398 4356	·0438 4385	·0431 5665	39
40	·0365 5575	·0360 8157	·0398 3623	·0392 6079	·0432 6238	·0425 9623	40
41	0·0359 7188	0·0355 1051	0·0392 6786	0·0387 0878	0·0427 1241	0·0420 6635	41
42	·0354 1729	·0349 6813	·0387 2876	·0381 8530	·0421 9167	·0415 6482	42
43	·0348 8993	·0344 5244	·0382 1688	·0376 8837	·0416 9811	·0410 8962	43
44	·0343 8794	·0339 6162	·0377 3037	·0372 1616	·0412 2985	·0406 3895	44
45	·0339 0962	·0334 9399	·0372 6752	·0367 6701	·0407 8518	·0402 1115	45
46	0·0334 5342	0·0330 4804	0·0368 2676	0·0363 3940	0·0403 6254	0 0398 0469	46
47	·0330 1792	·0326 2238	·0364 0669	·0359 3196	·0399 6051	·0394 1821	47
48	·0326 0084	·0322 1574	·0360 0599	·0355 4339	·0395 7777	·0390 5043	48
49	·0322 0396	·0318 2695	·0356 2348	·0351 7256	·0392 5314	·0387 0017	49
50	·0318 2321	·0314 5493	·0352 5806	·0348 1836	·0388 6550	·0383 6638	50

TABELLE V.

Werte von $\frac{1}{a_{\overline{n|}}} = \frac{1}{\Sigma v^n}$, beziehungsweise $\frac{w}{\bar{a}_{\overline{n|}}} = \frac{w}{\Sigma w^n}$.

n	3½%		4%		4½%		n
	dekursiv	antizipativ	dekursiv	antizipativ	dekursiv	antizipativ	
1	1·035	1	1·04	1	1·045	1	1
2	0·5264 0049	0·5089 0585	0·5301 9608	0·5102 0408	0·5339 9756	0·5115 0895	2
3	·3569 3418	·3452 7704	·3603 4854	·3470 2943	·3637 7336	·3487 9361	3
4	·2722 5114	·2635 1453	·2754 9005	·2655 1003	·2787 4365	·2675 2211	4
5	·2214 8137	·2144 9850	·2246 2711	·2166 5268	·2277 9164	·2188 2803	5
6	0 1876 6821	0·1818 5568	0·1907 6190	0·1841 2628	0·1938 7839	0·1864 2256	6
7	·1635 4449	·1585 6894	·1666 0961	·1609 3178	·1697 0147	·1633 2476	7
8	·1454 7665	·1411 2969	·1485 2783	·1435 6965	·1516 0965	·1460 4412	8
9	·1314 4601	·1275 8874	·1344 9299	·1300 9569	·1375 7447	·1326 4148	9
10	·1202 4137	·1167 7654	·1232 9094	·1193 4336	·1263 7882	·1219 5331	10
11	0·1110 9197	0·1079 4886	0·1141 4904	0·1105 7033	0·1172 4818	0·1132 3918	11
12	·1034 8395	·1006 0951	·1065 5217	·1032 8172	·1096 6619	·1060 0546	12
13	·0970 6157	·0944 1499	·1001 4373	·0971 3485	·1032 7535	·0999 1038	13
14	·0915 7073	·0891 1993	·0946 6897	·0918 8502	·0978 2032	·0947 0982	14
15	·0868 2507	·0845 4439	·0899 4110	·0873 5272	·0931 1381	·0902 2477	15
16	0·0826 8483	0·0805 5342	0·0858 2000	0·0834 0334	0·0890 1537	0·0863 2092	16
17	·0790 4313	·0770 4381	·0821 9852	·0799 3394	·0854 1758	·0828 9560	17
18	·0758 1684	·0739 3529	·0789 9333	·0768 6444	·0822 3690	·0798 6892	18
19	·0729 4033	·0711 6448	·0761 3862	·0741 3163	·0794 0734	·0771 7781	19
20	·0703 6108	·0686 8068	·0735 8175	·0716 8491	·0768 7614	·0747 7182	20
21	0·0680 3659	0·0664 4284	0·0712 8011	0·0694 8333	0·0746 0057	0·0726 1008	21
22	·0659 3207	·0644 1738	·0691 9881	·0674 9340	·0725 4565	·0706 5918	22
23	·0640 1880	·0625 7653	·0673 0906	·0656 8742	·0706 8249	·0688 9148	23
24	·0622 7283	·0608 9720	·0655 8683	·0640 4234	·0689 8703	·0672 8397	24
25	·0606 7404	·0593 5995	·0640 1196	·0625 3877	·0674 3903	·0658 1730	25
26	0·0592 0540	0·0579 4833	0·0625 6738	0·0611 6028	0·0660 2137	0·0644 7510	26
27	·0578 5241	·0566 4835	·0612 3854	·0598 9293	·0647 1946	·0632 4342	27
28	·0566 0265	·0554 4798	·0600 1298	·0587 2473	·0635 2081	0·621 1033	28
29	·0554 4538	·0543 3691	·0588 7993	·0576 4533	·0624 1461	·0610 6547	29
30	·0543 7133	·0533 0613	·0578 3010	·0566 4580	·0613 9154	·0600 9994	30
31	0·0533 7240	0·0523 4784	0·0568 5535	0·0557 1832	0·0604 4345	0·0592 0593	31
32	·0524 4150	·0514 5521	·0559 4859	·0548 5608	·0595 6320	·0583 7664	32
33	.0515 7242	·0506 2221	·0551 0357	·0540 5306	·0587 4453	·0576 0606	33
34	·0507 5966	·0498 4354	·0543 1477	·0533 0398	·0579 8191	·0568 8892	34
35	·0499 9835	·0491 1450	·0535 7732	·0526 0413	·0572 7045	·0562 2052	35
36	0·0492 8416	0·0484 3093	0·0528 8688	0·0519 4935	0·0566 0578	0·0555 9669	36
37	·0486 1325	·0477 8908	·0522 3957	·0513 3592	.0559 8402	·0550 1373	37
38	·0479 8214	·0471 8561	·0516 3192	·0507 6051	·0554 0169	·0544 6830	38
39	·0473 8775	·0466 1756	·0510 6083	·0502 2012	·0548 5567	·0539 5741	39
40	·0468 2728	·0460 8220	·0505 2349	·0497 1205	·0543 4315	·0534 7839	40
41	0·0462 9822	0·0455 7709	0·0500 1738	0·0492 3389	0·0538 6158	0·0530 2879	41
42	·0457 9828	·0451 0007	·0495 4020	·0487 8343	·0534 0868	·0526 0642	42
43	·0453 2539	·0446 4911	·0490 8989	·0483 5868	·0529 8235	·0522 0930	43
44	·0448 7768	·0442 2241	·0486 6454	·0479 5781	·0525 8071	·0518 3560	44
45	·0444 5343	·0438 1830	·0482 6246	·0475 7918	·0522 0202	·0514 8368	45
46	0·0440 5108	0·0434 3527	0·0478 8205	0·0472 2129	0·0518 4471	0·0511 5203	46
47	·0436 6919	·0430 7195	·0475 2189	·0468 8273	·0515 0734	·0508 3926	47
48	·0433 0646	·0427 2705	·0471 8065	·0465 6226	·0511 8858	·0505 4412	48
49	·0429 6167	·0423 9944	·0468 5712	·0462 5869	·0508 8722	·0502 6544	49
50	·0426 3371	·0420 8800	·0465 5020	·0459 7097	·0506 0215	·0500 0216	50

TABELLE V.

Werte von $\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\Sigma v^n}$, beziehungsweise $\frac{w}{\bar{a}_{\overline{n}|}} = \frac{w}{\Sigma w^n}$.

n	5°/o dekursiv	5°/o antizipativ	6°/o dekursiv	6°/o antizipativ	n
1	1·05	*1*	1·06	*1*	1
2	0·5378 0488	*0·5128 2052*	0·5454 3689	*0·5154 6392*	2
3	·3672 0856	*·3505 6967*	·3741 0981	*·3541 5781*	3
4	·2820 1183	*·2695 5086*	·2885 9149	*·2736 5891*	4
5	·2309 7480	*·2210 2470*	·2373 9640	*·2254 8255*	5
6	0·1970 1747	*0·1887 4470*	0·2033 6263	*0·1934 6712*	6
7	·1728 1982	*·1657 4803*	·1791 3502	*·1706 8613*	7
8	·1547 2181	*·1485 5329*	·1610 3594	*·1536 7629*	8
9	·1406 9008	*·1352 2629*	·1470 2224	*·1405 1351*	9
10	·1295 0458	*·1246 0653*	·1358 6796	*·1300 4328*	10
11	0·1203 8889	*0·1159 5550*	0·1267 9294	*0·1215 3085*	11
12	·1128 2541	*·1087 8080*	·1192 7703	*·1144 8641*	12
13	·1064 5577	*·1027 4157*	·1129 6011	*·1085 7077*	13
14	·1010 2397	*·0975 9430*	·1075 8491	*·1035 4168*	14
15	.0963 4229	*·0931 6039*	·1029 6276	*·0992 2141*	15
16	0·0922 6991	*0·0893 0592*	0·0989 5214	*0·0954 7668*	16
17	·0886 9914	*·0859 2842*	·0954 4480	*·0922 0553*	17
18	·0855 4622	*·0829 4822*	·0923 5654	*·0893 2866*	18
19	·0827 4501	*·0803 0240*	·0896 2086	*·0867 8341*	19
20	·0802 4259	*·0779 4061*	·0871 8456	*·0845 1969*	20
21	0 0779 9611	*0·0758 2209*	0·0850 0455	*0·0824 9689*	21
22	·0759 7051	*·0739 1350*	·0830 4557	*·0806 8180*	22
23	·0741 3683	*·0721 8724*	·0812 7848	*·0790 4697*	23
24	·0724 7090	*·0706 2038*	·0796 7901	*·0775 6950*	24
25	·0709 5246	*·0691 9358*	·0782 2672	*·0762 3017*	25
26	0·0695 6432	*0·0678 9051*	0·0769 0435	*0·0750 1270*	26
27	·0682 9186	*·0666 9727*	·0756 9717	*·0739 0322*	27
28	·0671 2253	*·0656 0190*	·0745 9255	*·0728 8982*	28
29	·0660 4551	*·0645 9410*	·0735 7961	*·0719 6224*	29
30	·0650 5144	*·0636 6497*	·0726 4891	*·0711 1158*	30
31	0·0641 3212	*0·0628 0672*	0·0717 9222	*0·0703 3010*	31
32	·0632 8042	*·0620 1254*	·0710 0234	*·0696 1101*	32
33	·0624 9004	*·0612 7645*	·0702 7293	*·0689 8435*	33
34	·0617 5543	*·0605 9318*	·0695 9843	*·0683 3685*	34
35	·0610 7171	*·0599 5803*	·0689 7386	*·0677 7185*	35
36	0·0604 3449	*0·0593 6686*	0·0683 9483	*0·0672 4920*	36
37	·0598 3979	*·0588 1593*	·0678 5743	*·0667 6520*	37
38	·0592 8423	*·0583 0195*	·0673 5812	*·0663 1656*	38
39	·0587 6462	*·0578 2191*	·0668 9377	*·0659 0030*	39
40	·0582 7816	*·0573 7315*	·0664 6154	*·0655 1374*	40
41	0·0578 2229	*0·0569 5322*	0·0660 5886	*0·0651 5450*	41
42	·0573 9471	*·0565 5995*	·0656 8342	*·0648 2038*	42
43	·0569 9333	*·0561 9133*	·0653 3312	*·0645 0942*	43
44	·0566 1625	*·0558 4558*	·0650 0606	*·0642 1983*	44
45	·0562 6173	*·0555 2102*	·0647 0050	*·0639 4997*	45
46	0·0559 2820	*0·0552 1618*	0·0644 1485	*0·0636 9837*	46
47	·0556 1421	*·0549 2966*	·0641 4768	*·0634 6365*	47
48	·0553 1843	*·0546 6020*	·0638 9766	*·0632 4459*	48
49	·0550 3965	*·0544 0665*	·0636 6356	*·0630 4006*	49
50	·0547 7674	*·0541 6795*	·0634 4429	*·0628 4899*	50

TABELLE VI.

Werte von $\Sigma \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{z}$.

z	$\Sigma \frac{1}{z}$	z	$\Sigma \frac{1}{z}$	z	$\Sigma \frac{1}{z}$	z	$\Sigma \frac{1}{z}$
1		51	3·5188 1318	101	4·1972 7851	151	4·5978 0311
2	0·5	52	3·5380 4395	102	4·2070 8243	152	4·6043 8205
3	0 8333 3333	53	3·5569 1188	103	4·2167 9117	153	4·6109 1800
4	1·0833 3333	54	3·5754 3089	104	4·2264 0655	154	4 6174 1151
5	1 2833 3333	55	3·5936 1221	105	4·2359 3036	155	4 6238 6312
6	1·45	56	3·6114 6935	106	4·2453 6432	156	4·6302 7338
7	1·5928 5714	57	3·6290 1321	107	4 2547 1012	157	4·6366 4280
8	1·7178 5714	58	3·6462 5459	108	4 2639 6938	158	4·6429 7192
9	1·8289 6825	59	3·6632 0375	109	4·2731 4369	159	4·6492 6122
10	1·9289 6825	60	3 6798 7041	110	4·2822 3460	160	4·6555 1122
11	2·0198 7734	61	3·6962 6386	111	4·2912 4361	161	4·6617 2241
12	2 1032 1068	62	3·7123 9289	112	4·3001 7218	162	4·6678 9524
13	2·1801 3376	63	3·7282 6590	113	4·3090 2174	163	4·6740 3021
14	2 2515 6233	64	3·7438 9090	114	4·3177 9367	164	4·6801 2777
15	2·3182 2899	65	3·7592 7552	115	4·3264 8932	165	4·6861 8838
16	2·3807 2899	66	3 7744 2703	116	4·3351 1001	166	4·6922 1248
17	2·4395 5252	67	3·7893 5241	117	4·3436 5702	167	4·6982 0050
18	2·4951 0808	68	3·8040 5829	118	4·3521 3159	168	4·7041 5288
19	2·5477 3966	69	3·8185 5104	119	4·3605 3495	169	4·7100 7004
20	2·5977 3966	70	3·8328 3676	120	4·3688 6829	170	4·7159 5239
21	2·6453 5870	71	3·8469 2126	121	4·3771 3275	171	4·7218 0035
22	2·6908 1325	72	3·8608 1015	122	4·3853 2947	172	4·7276 1430
23	2·7342 9151	73	3 8745 0878	123	4·3934 5955	173	4·7333 9465
24	2·7759 5818	74	3·8880 2230	124	4·4015 2407	174	4·7391 4177
25	2·8159 5818	75	3·9013 5563	125	4·4095 2407	175	4·7448 5606
26	2·8544 1972	76	3·9145 1353	126	4·4174 6058	176	4·7505 3788
27	2·8914 5675	77	3·9275 0054	127	4·4253 3459	177	4·7561 8760
28	2·9271 7104	78	3·9403 2105	128	4·4331 4709	178	4·7618 0557
29	2·9616 5380	79	3·9529 7928	129	4·4408 9903	179	4·7673 9217
30	2·9949 8713	80	3·9654 7928	130	4·4485 9134	180	4·7729 4772
31	3·0272 4520	81	3·9778 2496	131	4·4562 2493	181	4·7784 7258
32	3·0584 9520	82	3·9900 2008	132	4·4638 0068	182	4·7839 6709
33	3·0887 9823	83	4·0020 6827	133	4·4713 1948	183	4·7894 3157
34	3 1182 0999	84	4·0139 7303	134	4·4787 8217	184	4·7948 6635
35	3·1467 8142	85	4·0257 3774	135	4·4861 8957	185	4·8002 7176
36	3·1745 5920	86	4·0373 6565	136	4 4935 4252	186	4·8056 4810
37	3 2015 8622	87	4·0488 5990	137	4·5008 4179	187	4 8109 9570
38	3·2279 0201	88	4·0602 2354	138	4·5080 8816	188	4·8163 1484
39	3·2535 4304	89	4 0714 5949	139	4·5152 8241	189	4 8216 0585
40	3·2785 4304	90	4·0825 7060	140	4·5224 2526	190	4·8268 6901
41	3·3029 3328	91	4·0935 5961	141	4·5295 1796	191	4·8321 0461
42	3·3267 4281	92	4·1044 2918	142	4·5365 5972	192	4·8373 1294
43	3·3499 9862	93	4·1151 8187	143	4·5435 5272	193	4·8424 9429
44	3·3727 2589	94	4·1258 2017	144	4·5504 9717	194	4·8476 4893
45	3·3949 4812	95	4·1363 4648	145	4·5573 9372	195	4·8527 7713
46	3·4166 8725	96	4·1467 6315	146	4 5642 4303	196	4·8578 7918
47	3·4379 6384	97	4·1570 7243	147	4·5710 4576	197	4·8629 5532
48	3·4587 9718	98	4·1672 7651	148	4·5778 0251	198	4·8680 0582
49	3·4792 0534	99	4·1773 7752	149	4·5845 1392	199	4·8730 3095
50	3·4992 0534	100	4·1873 7752	150	4·5911 8059	200	4·8780 3095

II.

Sterblichkeits-Tafeln.

VII. Sterbenswahrscheinlichkeiten (q_x).

VIII. Deutsche Rentner-Sterbetafel M und W. $3^1/_2{}^0/_0$.

IXa, b, c. Rentner-Sterbetafel der 43 britischen Gesellschaften. $3^1/_2{}^0/_0$ O^{am}, O^{af} und O^{amf}.

X. Sterbetafel der 20 englischen Gesellschaften. $3^0/_0$. H^M.

XI. Sterbetafel der 23 deutschen Gesellschaften, $3^1/_2{}^0/_0$. M und WI.

XII a, b. Sterbetafel der 60 britischen Gesellschaften. $3^1/_2{}^0/_0$. O^M.

XIII. Österreichisch-ungarische Sterblichkeitstafel. $3^1/_2{}^0/_0$. AH^M.

XIV. Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für die Versicherungen der Invaliditäts- und Altersrenten. $4^0/_0$.

XV. Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für die Versicherungen der Witwenrenten. $4^0/_0$.

XVI. Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für die Versicherungen der Waisenrenten und einmaligen Abfertigungen. $4^0/_0$.

TABELLE VII.

Sterbenswahrscheinlichkeiten.

Alter	Deutsche Rentner-Sterbetafel M und W 1889	Rentner-Sterbetafel der 3 französischen Gesellschaften M und F 1898	Rentner-Sterbetafel der 43 britischen Gesellschaften 1893		Tafel der 17 englischen Gesellschaften Männer 1843	Tafel der 20 englischen Gesellschaften Männer 1869	Tafel der 23 deutschen Gesellschaften M und WI 1883	Tafel der 60 britischen Gesellschaften Männer 1893	Österreichisch-ungarische Sterblichkeitstafel A^M 1909	Alter
			Männer	Frauen						
20		0·0043			0·0073	0·0063	0·0092	0·0040	0·00349	20
21		·0046			·0074	·0067	·0092	·0042	·00362	21
22		·0049			·0075	·0068	·0090	·0043	·00376	22
23		0052			·0076	·0068	·0088	·0045	·00391	23
24		·0055			·0077	0066	·0087	·0046	·00407	24
25	0·0035	0·0058	0·0070	0·0068	0·0078	0·0066	0·0085	0·0048	0·00424	25
26	·0036	·0058	·0071	·0069	·0079	·0067	·0085	·0050	·00443	26
27	·0036	·0058	·0073	·0070	·0080	·0069	·0085	·0052	·00464	27
28	·0037	·0058	·0073	·0072	·0081	·0072	·0085	·0054	·00486	28
29	·0038	·0057	·0075	·0073	·0083	·0074	·0087	·0057	·00599	29
30	0·0039	0·0056	0·0076	0·0075	0·0084	0·0077	0·0088	0·0060	0·00535	30
31	·0040	·0056	·0078	·0077	·0086	·0079	·0090	·0062	·00563	31
32	·0041	·0058	·0079	·0079	·0087	·0081	·0092	·0065	·00593	32
33	·0043	·0060	·0081	·0081	·0089	·0083	·0094	·0068	·00625	33
34	·0044	·0063	·0083	·0084	·0091	·0085	·0097	·0071	·00660	34
35	0·0046	0·0066	0·0085	0·0087	0·0093	0·0088	0·0100	0·0074	0·00698	35
36	·0047	·0069	·0088	·0090	·0095	·0091	·0103	·0077	·00738	36
37	·0049	·0072	·0090	·0094	·0097	·0095	·0106	·0080	·00782	37
38	·0052	·0075	·0093	·0097	·0099	·0098	·0109	·0084	·00829	38
39	·0054	·0076	·0096	·0101	·0101	·0101	·0113	·0088	·00881	39
40	0·0057	0·0078	0·0099	0·0104	0·0104	0·0103	0·0118	0·0092	0·00936	40
41	·0060	·0081	·0103	·0109	·0106	·0105	·0123	·0096	·00995	41
42	·0064	·0085	·0107	·0113	·0109	·0107	·0128	·0100	·01060	42
43	·0068	·0089	·0111	·0118	·0113	·0111	·0133	·0105	·01129	43
44	·0073	·0093	0116	·0122	·0117	·0116	·0139	·0110	·01204	44
45	0·0079	0·0098	0·0121	0·0127	0·0122	0·0122	0·0144	0·0115	0·01285	45
46	·0084	·0103	·0127	·0132	·0128	·0129	·0149	·0121	·01372	46
47	·0091	·0108	·0132	·0137	·0135	·0137	·0155	·0128	·01466	47
48	·0097	0113	·0139	·0143	·0143	·0144	·0162	·0135	·01567	48
49	·0104	·0120	·0147	·0148	·0151	·0152	0171	·0142	·01677	49
50	0·0112	0·0127	0·0154	0·0153	0·0159	0·0160	0·0181	0·0150	0·01795	50
51	·0119	·0137	·0163	·0159	·0169	·0167	·0193	·0160	·01922	51
52	·0127	·0146	·0172	·0164	·0179	·0175	·0206	·0169	·02060	52
53	·0136	·0152	·0183	·0169	·0191	·0186	·0220	·0180	·02208	53
54	·0146	·0158	·0194	·0175	·0203	·0197	·0235	·0192	·02368	54
55	0·0157	0·0165	0·0206	0·0181	0·0217	0·0210	0·0251	0·0205	0·02540	55
56	·0168	·0174	·0219	·0187	·0231	·0225	·0268	·0218	·02726	56
57	·0181	·0185	·0234	·0194	·0247	·0240	·0287	·0234	·02926	57
58	·0194	·0197	·0249	·0201	·0264	·0256	·0307	·0251	·03142	58
59	·0209	·0212	·0267	·0209	·0282	·0275	·0329	·0269	·03375	59
60	0·0224	0·0228	0·0285	0·0218	0·0303	0·0297	0·0354	0·0289	0·03625	60
61	·0242	·0243	·0306	·0229	·0326	·0320	·0378	·0311	·03895	61
62	·0262	·0260	·0328	·0240	·0351	·0346	·0404	·0334	·04185	62
63	·0282	·0281	·0352	·0255	·0378	0375	·0432	·0360	·04498	63
64	·0305	·0303	·0378	·0271	·0408	·0404	·0461	·0389	·04834	64

TABELLE VII.

Sterbenswahrscheinlichkeiten.

Alter	Deutsche Rentner-Sterbetafel M und W 1889	Rentner-Sterbetafel der 3 französischen Gesellschaften M und F 1898	Rentner-Sterbetafel der 43 britischen Gesellschaften 1893		Tafel der 17 englischen Gesellschaften Männer 1843	Tafel der 20 englischen Gesellschaften Männer 1869	Tafel der 23 deutschen Gesellschaften M und WI 1883	Tafel der 60 britischen Gesellschaften Männer 1893	Österreichisch-ungarische Sterblichkeitstafel A^M 1909	Alter
			Männer	Frauen						
65	0·0333	0·0330	0·0407	0·0290	0·0441	0·0434	0·0494	0·0420	0·05197	65
66	·0363	·0362	·0438	·0312	0476	·0466	·0533	·0453	·05586	66
67	·0395	·0397	·0472	·0337	·0515	·0499	·0576	·0490	·06005	67
68	·0431	·0436	·0509	·0366	·0556	·0532	·0623	·0530	·06456	68
69	0470	·0479	·0549	·0399	·0601	·0573	·0673	·0574	·06940	69
70	0·0512	0·0526	0·0593	0·0436	0·0649	0·0622	0·0728	0·0621	0·07460	70
71	·0558	·0576	·0640	·0477	·0702	·0681	·0786	·0672	·08018	71
72	·0608	·0630	·0691	·0523	·0758	·0749	·0846	·0728	·08617	72
73	·0663	·0689	·0747	·0573	·0819	·0829	·0913	·0789	·09260	73
74	·0718	·0748	·0807	·0629	·0885	·0912	·0985	·0855	·09949	74
75	0·0779	0·0816	0·0873	0·0689	0·0956	0·0984	0·1065	0·0926	0·10687	75
76	·0844	·0890	·0944	·0755	·1032	·1064	·1145	·1004	·11478	76
77	·0915	·0970	·1021	·0826	·1115	·1147	·1231	·1088	·12324	77
78	·0992	·1070	·1104	·0902	·1204	·1232	·1323	·1180	·13228	78
79	·1075	·1180	·1193	·0988	·1301	·1331	·2422	·1278	·14194	79
80	0·1165	0·1297	0·1290	0·1079	0·1404	0·1447	0·1552	0·1384	0·15226	80
81	·1277	·1423	·1395	·1177	·1514	·1580	·1697	·1500	·16326	81
82	·1399	·1545	·1508	·1284	·1632	·1714	·1845	·1624	·17498	82
83	·1533	·1663	·1629	·1397	1759	·1859	·1982	·1757	·18746	83
84	·1679	·1776	·1760	·1521	·1897	·1989	·2112	·1901	·20072	84
85	0·1840	0·1907	0·1900	0·1652	0·2051	0·2099	0·2221	0·2057	0·21480	85
86	·2016	·2043	·2050	·1795	·2225	·2197	·2279	·2221	·22973	86
87	·2209	·2183	·2211	·1947	·2422	·2312	·2336	·2400	·24553	87
88	·2420	·2326	·2382	·2110	·2653	·2393	2380	·2589	·26223	88
89	·2652	·2474	·2566	·2284	·2924	·2532	·2431	·2788	·27986	89
90	0·2898	0·2622	0·2760	0·2469	0·3237	0·2795		0·3008	0·29842	90
91	·3203	·2752	·2967	·2666	3610	·3127		·3226	·31793	91
92	·3527	·2877	·3186	·2876	·4053	·3513		·3479	·33839	92
93	·3884	·3008	·3418	·3098	·4572	·4158		·3712	·35980	93
94	·4277	·3152	·3661	·3332	·5163	·5073		·4000	·38214	94
95	0·4699	0·3312	0·3917	0·3579	0·5843	0·6370		0·4247	0·40540	95
96	·5162	·3492	4184	·3838	·6486	·8163		·4579	·42953	96
97	·6435	·3696	·4462	·4108	·6923	1·0000		4828	·45450	97
98	·8021	·3930	·4750	·4390	·7500			·5000		98
99	1·0000	·4200	·5048	·4682	1·0000			·5333		99
100		0·4510	0·5354	0·4984				0·5714		100
101		·4767	·5666	·5293				·6667		101
102		·5051	·5983	·5609						102
103		·5367	·6302	·5930						103
104		·5717								104
105		0·6108								105
106		·6543								106
107		1·0000								107

TABELLE VIII. Deutsche Rentner-Sterbetafel (Männer und Frauen).

x	l_x	D_x	N_x	S_x	a_x	x
25	100 000	42 315	928 629	1631 1744	21·946	25
26	99 646	40 739	886 314	1538 3115	21·756	26
27	99 289	39 220	845 575	1449 6801	21·560	27
28	98 929	37 757	806 355	1365 1226	21·357	28
29	98 562	36 345	768 598	1284 4871	21·148	29
30	98 188	34 982	732 253	1207 6273	20·932	30
31	97 805	33 668	697 271	1134 4020	20·710	31
32	97 412	32 398	663 603	1064 6749	20·483	32
33	97 010	31 174	631 205	998 3146	20·248	33
34	96 596	29 991	600 031	935 1941	20·007	34
35	96 171	28 849	570 040	875 1910	19·759	35
36	95 732	27 746	541 191	818 1870	19·505	36
37	95 279	26 681	513 445	764 0679	19·244	37
38	94 810	25 652	486 764	712 7234	18·975	38
39	94 321	24 657	461 112	664 0470	18·701	39
40	93 811	23 694	436 455	617 9358	18·421	40
41	93 277	22 768	412 761	574 2903	18·133	41
42	92 715	21 860	389 993	533 0142	17·840	42
43	92 120	20 986	368 133	494 0149	17·542	43
44	91 490	20 137	347 147	457 2016	17·239	44
45	90 821	19 314	327 010	422 4869	16·931	45
46	90 108	18 514	307 696	389 7859	16·620	46
47	89 349	17 738	289 182	359 0163	16·303	47
48	88 539	16 982	271 444	330 0981	15·984	48
49	87 678	16 249	254 462	302 9537	15·660	49
50	86 766	15 536	238 213	277 5075	15·333	50
51	85 799	14 843	222 677	253 6862	15·002	51
52	84 775	14 170	207 834	231 4185	14·667	52
53	83 695	13 516	193 664	210 6351	14·328	53
54	82 558	12 882	180 148	191 2687	13·985	54
55	81 353	12 265	167 266	173 2539	13·638	55
56	80 078	11 664	155 001	156 5273	13·288	56
57	78 729	11 080	143 337	141 0272	12·937	57
58	77 305	10 512	132 257	126 6935	12·582	58
59	75 803	9 958·8	121 745·1	113 4677·5	12·225	59
60	74 220	9 421·2	111 786·3	101 2932·4	11·866	60
61	72 555	8 898·3	102 365·1	90 1146 1	11·504	61
62	70 798	8 389·2	93 466·8	79 8781·0	11·141	62
63	68 946	7 893·5	85 077·6	70 5314·2	10·778	63
64	66 999	7 411·2	77 184·1	62 0236·6	10·414	64
65	64 956	6 942·2	69 772·9	54 3052·5	10·051	65
66	62 796	6 484·4	62 830·7	47 3279·6	9·690	66
67	60 520	6 038·1	56 346·3	41 0448·9	9·332	67
68	58 128	5 603·3	50 308·2	35 4102·6	8·978	68
69	55 624	5 180·6	44 704·9	30 3794·4	8·629	69
70	53 012	4 770·4	39 524·3	25 9089·5	8·285	70
71	50 298	4 373·1	34 753·9	21 9565·2	7·947	71
72	47 491	3 989·4	30 380·8	18 4811·3	7·615	72
73	44 603	3 620·1	26 391·4	15 4430·5	7·290	73
74	41 648	3 266·0	22 771·3	12 8039·1	6·972	74

$d = 0{\cdot}0338164.$

TABELLE VIII. Deutsche Rentner-Sterbetafel (Männer und Frauen).

x	l_x	D_x	N_x	S_x	a_x	x
75	38 657	2 928·9	19 505·3	105 267·8	6·659	75
76	35 648	2 609·6	16 576·4	85 762·5	6·352	76
77	32 640	2 308·6	13 966 8	69 186·1	6·050	77
78	29 654	2 026·5	11 658·2	55 219·3	5·758	78
79	26 714	1 763·8	9 631·7	43 561·1	5·461	79
80	23 843	1 521·0	7 867·9	33 929·4	5·173	80
81	21 065	1 298·4	6 346·9	26 061·5	4·888	81
82	18 376	1 094·3	5 048·5	19 714·6	4·613	82
83	15 806	909·45	3 954·17	14 666·05	4·348	83
84	13 384	744·05	3 044·72	10 711·89	4·092	84
85	11 137	598·19	2 300·67	7 667 18	3·846	85
86	9 088	471·63	1 702·48	5 366·52	3·610	86
87	7 256	363·81	1 230·85	3 664·05	3·383	87
88	5 653	273·86	867·04	2 433·21	3·166	88
89	4 285	200·57	593·18	1 566·18	2·957	89
90	3 149	142·41	392·61	973·01	2·757	90
91	2 237	97·75	250·20	580·414	2·560	91
92	1 521	64·21	152·45	330·221	2·374	92
93	985	40·18	88·24	177·774	2·196	93
94	602	23·73	48·06	89·540	2·026	94
95	345	13·14	24·33	41·484	1·852	95
96	183	6·73	11·19	17·1532	1·662	96
97	89	3·16	4·46	5·9589	1·410	97
98	32	1·10	1·30	1·4972	1·183	98
99	6	0·199	0·199	0·1991	1·000	99

$d = 0{\cdot}0338164.$

O^am TABELLE IX a. Rentner-Sterbetafel der 43 britischen Gesellschaften (Männer). 3½%

x	l_x	p_x	e_x	D_x	N_x	a_x	x
25	97 691	0·99 296	38 418	41 338·	847 224·	20 495	25
26	97 004	·99 286	37·690	39 659·	805 886·	20·321	26
27	96 312	·99 275	36·961	38 044·	766 227·	20·140	27
28	95 615	·99 266	36·230	36 491·	728 183·	19·955	28
29	94 911	·99 252	35·499	34 999·	691 692·	19·763	29
30	94 201	0·99 236	34·766	33 562·	656 693·	19·567	30
31	93 483	·99 222	34·034	32 180·	623 131·	19·364	31
32	92 756	·99 206	33·300	30 850·	590 951·	19·156	32
33	92 020	·99 188	32·566	29 570·	560 101·	18·942	33
34	91 273	·99 170	31·833	28 338·	530 531·	18 721	34
35	90 514	0·99 147	31·100	27 153·	502 193·	18·495	35
36	89 743	·99 124	30·367	26 011·	475 040·	18·264	36
37	88 957	·99 999	29·635	24 911·	449 029·	18·026	37
38	88 155	·99 070	28·905	23 852·	424 118·	17·781	38
39	87 336	·99 040	28·177	22 831·	400 266·	17·532	39
40	86 497	0·99 008	27·450	21 847·	377 435·	17·276	40
41	85 639	·98 971	26·725	20 899·	355 588·	17·015	41
42	84 757	·98 930	26·002	19 984·	334 689·	16·748	42
43	83 852	·98 889	25·284	19 102·	314 705·	16·475	43
44	82 920	·98 842	24·567	18 251·	295 603·	16·197	44
45	81 959	0 98 789	23·855	17 429·	277 352·	15·913	45
46	80 968	·98 735	23·148	16 636·	259 923·	15 624	46
47	79 944	·98 676	22·444	15 870·	243 287·	15·330	47
48	78 883	·98 608	21·746	15 130·	227 417·	15·031	48
49	77 785	·98 535	21·052	14 415·	212 287·	14·727	49
50	76 645	0·98 456	20·366	13 724·	197 872·	14·418	50
51	75 462	·98 369	19·685	13 055·	184 148·	14·105	51
52	74 232	·98 277	19·011	12 408·	171 093·	13·790	52
53	72 952	·98 173	18·345	11 781·	158 685·	13·469	53
54	71 619	·98 062	17·686	11 175·	146 904·	13·146	54
55	70 231	0·97 940	17·036	10 588·	135 729·	12 819	55
56	68 785	·97 807	16·394	10 019·	125 141·	12·490	56
57	67 276	·97 663	15·762	9 468 0	115 122·	12·159	57
58	65 704	·97 506	15·139	8 934·1	105 654·4	11·826	58
59	64 065	·97 333	14·526	8 416·7	96 720 3	11·492	59
60	62 356	0·97 147	13·924	7 915·2	88 303·6	11·156	60
61	60 577	·96 942	13·333	7 429·3	80 388·4	10·820	61
62	58 724	·96 721	12·754	6 958·6	72 959·1	10·485	62
63	56 799	·96 478	12·186	6 502·8	66 000·5	10·150	63
64	54 799	·96 217	11·631	6 061 6	59 497 7	9·815	64
65	52 725	0·95 929	11·088	5 635·1	53 436·1	9·483	65
66	50 579	·95 618	10·559	5 222·9	47 801·0	9·152	66
67	48 362	·95 277	10·043	4 825·1	42 578·1	8·824	67
68	46 079	·94 912	9·541	4 441·8	37 753·0	8·500	68
69	43 734	·94 510	9·052	4 073·2	33 311·2	8·178	69
70	41 333	0·94 074	8·578	3 719·5	29 238·0	7·861	70
71	38 884	·93 603	8·118	3 380·7	25 518·5	7.548	71
72	36 396	·93 087	7·673	3 057·4	22 137·8	7·241	72
73	33 881	·92 534	7·243	2 749 8	19 080·4	6·939	73
74	31 351	·91 926	6 827	2 458·4	16 330·6	6·643	74

$d = 0{\cdot}0338164.$

3½% TABELLE IX a. Rentner-Sterbetafel der 43 britischen Gesellschaften (Männer). O^am

x	l_x	p_x	e_x	D_x	N_x	a_x	x
75	28 820	0·91 273	6·426	2183·5	13 872·2	6·353	75
76	26 305	·90 565	6·041	1925·6	11 688·7	6·070	76
77	23 823	·89 795	5·670	1684·9	9 763·1	5·794	77
78	21 392	·88 965	5·315	1461·8	8 078·2	5·526	78
79	19 031	·88 068	4·974	1256·5	6 616·4	5·266	79
80	16 760	0 87 096	4·648	1069·2	5 359·9	5·018	80
81	14 598	·86 052	4·336	899·73	4 290·7	4·769	81
82	12 561	·84 922	4·039	748·05	3 390·92	4·533	82
83	10 668	·83 711	3·757	613·78	2 642·87	4·306	83
84	8 930	·82 404	3·488	496·42	2 029 09	4·088	84
85	7 859	0·81 005	3·232	395·24	1 532·67	3·878	85
86	5 961	·79 501	2·990	309·34	1 137·43	3·677	86
87	4 789	·77 895	2·761	237·61	828·09	3·485	87
88	3 691	·76 176	2·545	178·83	590·48	3·302	88
89	2 812	·74 345	2·341	131·62	411 65	3·128	89
90	2 091	0·72 397	2·149	94·541	280·03	2·962	90
91	1 513	·70 327	1·968	66·130	185·491	2·805	91
92	1 064	·68 138	1·799	44·935	119·861	2·656	92
93	725	·65 825	1·640	29·582	74·426	2·516	93
94	477	·68 390	1·491	18·814	44·844	2·384	94
95	303	0 60 835	1·352	11·523	26·030	2·259	95
96	184	·58 165	1·222	6·7728	14·507	2·142	96
97	107	·55 382	1·100	3·8062	7·7340	2·032	97
98	59	·52 498	0·987	2·0367	3·9278	1·929	98
99	31	·49 522	·880	1·0330	1·8911	1·831	99
100	15	0·46 464	0·777	0·4943	0·8581	1·736	100
101	7	·43 343	·672	·2219	·3638	1·639	101
102	3	·40 175	·550	·0929	·1419	1·527	102
103	1	·36 981	·370	·0361	·0490	1·357	103
104	0			·0129	·0129	1·000	104

$d = 0{\cdot}0338164.$

TABELLE IX b. Rentner-Sterbetafel der 43 britischen Gesellschaften (Frauen). 3½%

x	l_x	p_x	e_x	D_x	N_x	a_x	x
25	97 658	0·993 18	39·974	41 324·	858 262·	20·769	25
26	96 993	·993 09	39·249	39 654·	816 938·	20·602	26
27	96 323	·992 98	38·521	38 049·	777 284·	20·429	27
28	95 646	·992 84	37·795	36 504·	739 235·	20·251	28
29	94 961	·992 68	37·066	35 017·	702 731·	20·068	29
30	94 266	0·992 50	36·340	33 585·	667 714·	19·881	30
31	93 560	·992 32	35·615	32 206·	634 129·	19·690	31
32	92 840	·992 06	34 891	30 878·	601 923·	19·494	32
33	92 105	·991 86	34·170	29 597·	571 045·	19·294	33
34	91 354	·991 59	33·450	28 364·	541 448·	19·090	34
35	90 585	0·991 29	32·733	27 174·	513 084·	18·882	35
36	89 797	·991 01	32·021	26 026·	485 910	18·670	36
37	88 989	·990 65	31·312	24 920·	459 884·	18·454	37
38	88 158	·990 31	30·607	23 852·	434 964·	18·236	38
39	87 303	·989 92	29·907	22 822·	411 112·	18·014	39
40	86 424	0·989 56	29·211	21 828·	388 290·	17·788	40
41	85 520	·989 10	28·519	20 870·	366 462·	17·559	41
42	84 589	·988 69	27·834	19 944·	345 592·	17·328	42
43	83 631	·988 21	27·153	19 052·	325 648·	17·093	43
44	82 646	·987 76	26·476	18 190·	306 596·	16·855	44
45	81 633	0·987 26	25·804	17 360·	288 406·	16·613	45
46	80 593	·986 76	25·138	16 559·	271 046·	16·368	46
47	79 526	·986 26	24·475	15 787·	254 487·	16·120	47
48	78 433	·985 73	23·816	15 044·	238 700·	15·867	48
49	77 314	·985 19	23·161	14 328·	223 656·	15·610	49
50	76 170	0·984 67	22·509	13 638·	209 328·	15·349	50
51	75 002	·984 15	21·859	12 975·	195 690·	15·082	51
52	73 812	·983 58	21·211	12 338·	182 715·	14·810	52
53	72 601	·983 06	20·566	11 725·	170 377·	14·531	53
54	71 370	·982 47	19·02[illegible]	11 136·	158 652·	14·247	54
55	70 119	0·981 88	19·275	10 571·	147 516·	13·954	55
56	68 850	·981 27	18·631	10 029·	136 945·	13·656	56
57	67 560	·980 62	17·987	9 508·0	126 916·	13·349	57
58	66 250	·979 90	17·342	9 008·4	117 407·5	13·033	58
59	64 918	·979 08	16·698	8 528·8	108 399·1	12 710	59
60	63 561	0·978 21	16·055	8 068·1	99 870·3	12·378	60
61	62 175	·977 12	15·412	7 625 4	91 802·2	12·039	61
62	60 754	·975 96	14·773	7 199·0	84 176·8	11·693	62
63	59 292	·974 54	14·137	6 788·3	76 977·8	11·340	63
64	57 783	·972 90	13·506	6 391·8	70 189·5	10·981	64
65	56 217	0·971 00	12·883	6 008·3	63 797·7	10·618	65
66	54 587	·968 79	12·267	5 636·8	57 789·4	10·251	66
67	52 884	·966 30	11·662	5 276·2	52 152·6	9·884	67
68	51 101	·963 36	11·069	4 926·0	46 876·4	9·516	68
69	49 229	·960 09	10·490	4 585·0	41 950·4	9·150	69
70	47 264	0·956 42	9·926	4 253·1	37 365·4	8·785	70
71	45 204	·952 27	9·378	3 930·2	33 112·3	8·425	71
72	43 047	·947 74	8·849	3 616·0	29 182·1	8·070	72
73	40 797	·942 69	8·337	3 311·2	25 566·1	7·721	73
74	38 459	·937 15	7·843	3 015·9	22 254·9	7·379	74

$d = 0{\cdot}0338164.$

x	l_x	p_x	e_x	D_x	N_x	a_x	x
75	36 042	0·931 11	7·369	2730·7	19 239·0	7·045	75
76	33 559	·924 49	6·915	2456·6	16 508·3	6·720	76
77	31 025	·917 40	6·480	2194·3	14 051·7	6·403	77
78	28 462	·909 81	6·063	1945·0	11 857·4	6·096	78
79	25 889	·901 18	5·665	1709·3	9 912·4	5·799	79
80	23 331	0·892 07	5·287	1488·3	8 203 1	5·512	80
81	20 813	·882 29	4·926	1282·8	6 714·8	5·235	81
82	18 363	·871 65	4·584	1093·5	5 432·0	4 967	82
83	16 006	·860 30	4·259	920·94	4 338·5	4·711	83
84	13 770	·847 95	3·950	765·49	3 417·57	4·465	84
85	11 676	0·834 76	3·658	627·13	2 652·08	4·229	85
86	9 747	·820 54	3·382	505·82	2 024·95	4·003	86
87	7 998	·805 34	3·122	401·02	1 519·13	3·788	87
88	6 441	·789 04	2·877	312·03	1 118·11	3·583	88
89	5 082	·771 65	2·646	237·87	806·08	3·389	89
90	3 922	0·753 10	2·429	177·37	568·21	3·204	90
91	2 953	·733 36	2·226	129·03	390·84	3·029	91
92	2 166	·712 41	2·034	91·443	261·811	2·863	92
93	1 513	·690 21	1·855	62·939	170·368	2·707	93
94	1 065	·666 79	1·688	41·972	107·429	2·560	94
95	710	0·642 13	1·532	27·035	65·457	2·421	95
96	456	·616 25	1·386	16·776	38·422	2 290	96
97	281	·589 18	1·249	9·9885	21·6462	2·167	97
98	165	·561 01	1·127	5·6667	11·6577	2·057	98
99	93	·531 80	1·000	3·0860	5·9910	1·941	99
100	49	0·501 64	0·898	1·5710	2·9050	1·849	100
101	25	·470 67	0·760	0·7744	1·3340	1 723	101
102	12	·439 06	0·583	0·3591	0·5596	1 558	102
103	5	·406 97	0·400	0·1446	0·2005	1·386	103
104	2			0·0559	0 0559	1·000	104

$d = 0{\cdot}0338164.$

O^{amf} $3\frac{1}{2}\%$

TABELLE IX c. Barwerte der Verbindungsrenten auf zwei Leben nach der Rentner-Sterbetafel der 43 britischen Gesellschaften (Männer und Frauen).

$3\frac{1}{2}\%$ O^{amf}

Alter des Mannes	Die Frau ist älter um								Alter des Mannes
	0 Jahre	5 Jahre	10 Jahre	15 Jahre	20 Jahre	25 Jahre	30 Jahre	35 Jahre	
x	$a_{x:x}$	$a_{x:x+5}$	$a_{x:x+10}$	$a_{x:x+15}$	$a_{x:x+20}$	$a_{x:x+25}$	$a_{x:x+30}$	$a_{x:x+35}$	x
25	17·551	17·072	16·472	15·757	14·932	13·987	12·885	11·574	25
26	17·370	16·880	16·269	15·544	14·709	13·747	12·617	11·267	26
27	17·184	16·682	16·062	15·328	14·482	13·502	12·341	10·954	27
28	16·992	16·480	15·851	15·109	14·252	13·252	12·057	10·633	28
29	16·794	16·273	15·636	14·887	14·017	12·995	11·766	10·306	29
30	16·591	16·061	15·418	14·661	13·778	12·731	11·466	9·975	30
31	16·384	15·816	15·195	14·432	13·535	12·461	11·159	9·640	31
32	16·172	15·627	14·971	14·199	13·286	12·184	10·845	9·303	32
33	15·955	15·404	14·742	13·962	13·032	11·898	10·524	8·964	33
34	15·733	15·177	14·511	13·721	12·771	11·605	10·198	8·626	34
35	15·507	14·947	14·276	13·476	12·505	11·305	9·867	8·290	35
36	15·277	14·713	14·037	13·227	12·231	10·997	9·532	7·957	36
37	15·042	14·476	13·796	12·972	11·950	10·682	9·196	7·629	37
38	14·804	14·235	13·550	12·713	11·663	10·361	8·859	7·305	38
39	14·563	13·992	13·301	12·447	11·368	10·036	8·522	6·987	39
40	14·318	13·746	13·048	12·176	11·067	9·705	8·188	6·676	40
41	14·069	13·496	12·791	11·898	10·758	9·372	7·856	6·373	41
42	13·817	13·243	12·529	11·615	10·443	9·037	7·530	6·077	42
43	13·563	12·987	12·263	11·324	10·123	8·702	7·208	5·790	43
44	13·306	12·727	11·991	11·027	9·798	8·367	6·892	5·512	44
45	13·045	12·465	11·714	10·724	9·469	8·035	6·584	5·243	45
46	12·783	12·199	11·432	10·415	9·138	7·707	6·283	4·983	46
47	12·517	11·928	11·145	10·100	8·805	7·383	5·990	4·732	47
48	12·249	11·654	10·851	9·780	8·472	7·064	5·705	4·491	48
49	11·977	11·375	10·552	9·457	8·141	6·752	5·430	4·259	49
50	11·704	11·092	10·247	9·130	7·813	6·447	5·163	4·037	50
51	11·428	10·805	9·938	8·802	7·488	6·150	4·906	3·824	51
52	11·148	10·513	9·624	8·473	7·169	5·861	4·658	3·621	52
53	10·866	10·217	9·306	8·145	6·855	5·580	4·420	3·428	53
54	10·581	9·916	8·986	7·819	6·548	5·309	4·191	3·244	54
55	10·292	9·612	8·663	7·497	6·248	5·046	3·972	3·070	55
56	10·001	9·304	8·340	7·179	5·957	4·793	3·762	2·905	56
57	9·707	8·993	8·018	6·866	5·674	4·550	3·562	2·748	57
58	9·409	8·679	7·697	6·559	5·399	4·316	3·372	2·600	58
59	9·109	8·364	7·379	6·260	5·133	4·091	3·191	2·461	59
60	8·808	8·049	7·065	5·968	4·877	3·877	3·019	2·330	60
61	8·503	7·734	6·756	5·685	4·630	3·671	2·857	2·206	61
62	8·199	7·421	6·453	5·410	4·393	3·475	2·703	2·090	62
63	7·893	7·111	6·157	5·144	4·166	3·289	2·558	1·987	63
64	7·588	6·805	5·869	4·887	3·947	3·113	2·421	1·878	64
65	7·284	6·504	5·589	4·640	3·739	2·945	2·293	1·793	65
66	6·982	6·209	5·318	4·403	3·540	2·787	2·171	1·676	66
67	6·684	5·921	5·055	4·175	3·351	2·636	2·058	1·524	67
68	6·390	5·640	4·802	3·956	3·171	2·495	1·956	1·367	68
69	6·101	5·367	4·558	3·747	3·000	2·362	1·850		69
70	5·818	5·104	4·324	3·548	2·838	2·238	1·767		70
71	5·543	4·849	4·099	3·358	2·686	2·120	1·655		71
72	5·275	4·603	3·884	3·178	2·542	2·010	1·509		72
73	5·015	4·367	3·678	3·007	2·406	1·912	1·358		73
74	4·764	4·141	3·482	2·845	2·279	1·810			74

$d = 0·0338164.$

Alter des Mannes	Die Frau ist jünger um								Alter des Mannes
	5 Jahre	10 Jahre	15 Jahre	20 Jahre	25 Jahre	30 Jahre	35 Jahre	40 Jahre	
x	$a_{x:x-5}$	$a_{x:x-10}$	$a_{x:x-15}$	$a_{x:x-20}$	$a_{x:x-25}$	$a_{x:x-30}$	$a_{x:x-35}$	$a_{x:x-40}$	x
25									25
26									25
27									25
28									28
29									29
30	17·007								30
31	16·810								31
32	16·606								32
33	16·396								33
34	16·181								34
35	15·961	16·313							35
36	15·736	16·095							36
37	15·506	15·871							37
38	15·271	15·641							38
39	15·032	15·407							39
40	14·788	15·166	15·456						40
41	14·540	14·921	15·216						41
42	14·288	14·670	14·970						42
43	14·033	14·416	14·718						43
44	13·774	14·157	14·462						44
45	13·513	13·894	14·200	14·433					45
46	13·248	13·628	13·934	14·171					46
47	12·981	13·357	13·663	13·902					47
48	12·710	13·084	13·388	13·629					48
49	12·437	12·807	13·110	13·351					49
50	12·163	12·528	12·828	13·069	13·252				50
51	11·887	12·247	12·543	12·783	12·967				51
52	11·608	11·964	12·256	12·494	12·679				52
53	11·327	11·679	11·966	12·202	12·386				53
54	11·045	11·393	11·674	11·906	12·091				54
55	10·762	11·105	11·381	11·609	11·793	11·931			55
56	10·476	10·817	11·086	11·309	11·492	11·630			56
57	10·190	10·527	10·790	11·009	11·188	11·327			57
58	9·901	10·238	10·494	10·707	10·884	11·021			58
59	9·611	9·947	10·198	10·404	10·577	10·714			59
60	9·320	9·657	9·902	10·102	10·270	10·406	10·505		60
61	9·028	9·367	9·606	9·800	9·964	10·097	10·196		61
62	8·735	9·077	9·312	9·498	9·657	9·787	9·887		62
63	8·440	8·787	9·018	9·198	9·351	9·479	9·577		63
64	8·145	8·498	8·727	8·900	9·046	9·170	9·267		64
65	7·851	8·210	8·436	8·603	8·744	8·863	8·958	9·026	65
66	7·556	7·922	8·148	8·309	8·443	8·558	8·651	8·719	66
67	7·263	7·636	7·862	8·018	8·145	8·256	8·346	8·413	67
68	6·970	7·351	7·579	7·729	7·851	7·956	8·044	8·110	68
69	6·681	7·067	7·298	7·445	7·559	7·660	7·745	7·809	69
70	6·394	6·787	7·020	7·164	7·272	7·368	7·449	7·512	70
71	6·112	6·508	6·745	6·887	6·990	7·079	7·157	7·219	71
72	5·835	6·233	6·474	6·614	6·712	6·797	6·870	6·930	72
73	5·563	5·962	6·206	6·346	6·440	6·519	6·588	6·646	73
74	5·298	5·695	5·943	6·083	6·173	6·246	6·311	6·366	74

$d = 0·0338164.$

TABELLE IX c. Barwerte der Verbindungs- Sterbetafel der 43 britischen Ge-

Alter des Mannes x	Die Frau ist älter um 0 Jahre $a_{x:x}$	5 Jahre $a_{x:x+5}$	10 Jahre $a_{x:x+10}$	15 Jahre $a_{x:x+15}$	20 Jahre $a_{x:x+20}$	25 Jahre $a_{x:x+25}$	30 Jahre $a_{x:x+30}$	35 Jahre $a_{x:x+35}$	Alter des Mannes x
75	4·522	3·924	3·296	2·692	2·159	1·731			75
76	4·290	3·716	3·119	2·548	2·047	1·624			76
77	4·067	3·519	2·951	2·412	1·942	1·486			77
78	3·853	3·331	2·792	2·284	1·849	1·344			78
79	3·649	3·151	2·642	2·164	1·752				79
80	3·454	2·982	2·500	2·053	1·678				80
81	3·269	2·821	2·368	1·948	1·580				81
82	3·093	2·669	2·242	1·849	1·452				82
83	2·927	2·526	2·126	1·763	1·324				83
84	2·769	2·392	2·016	1·674					84
85	2·621	2·265	1·914	1·606					85
86	2·480	2·147	1·819	1·518					86
87	2·349	2·037	1·730	1·406					87
88	2·225	1·933	1·652	1·294					88
89	2·109	1·837	1·573						89
90	2·001	1·748	1·513						90
91	1·900	1·665	1·438						91
92	1·806	1·588	1·344						92
93	1·719	1·521	1·254						93
94	1·639	1·453							94
95	1·565	1·402							95
96	1·496	1·342							96
97	1·433	1·268							97
98	1·378	1·203							98
99	1·324								99
100	1·284								100
101	1·238								101
102	1·185								103
103	1·143								103
104	1·000								104

Um Rentenwerte mit einjähriger Altersdifferenz aus solchen mit fünfjährigem Altersintervalle zu berechnen, kann man sich der folgenden von *Woolhouse* gegebenen Interpolationsformel bedienen:

$$a_{x:y+t} = u_0 + \frac{t}{5}\Delta u_0 - \frac{t(5-t)}{50}\Delta^2 u_{-5}.$$

In dieser Formel bedeutet x das Alter des älteren Lebens und $y+t$ das Alter des jüngeren Lebens, welches zwischen y und $y+5$ liegt, wobei t den Wert 1, 2, 3 oder 4 haben kann. Setzt man für die in der Tafel gegebenen Rentenwerte $a_{x:y-5}$, $a_{x:y}$ und $a_{x:y+5}$ die Zeichen u_{-5}, u_0 und u_{+5}, so bedeutet:

$$\Delta u_0 = u_{+5} - u_0$$

$$\Delta u_{-5} = u_0 - u_{-5}$$

$$\text{und}\quad \Delta^2 u_{-5} = \Delta u_0 - \Delta u_{-5} = (u_{+5} - u_0) - (u_0 - u_{-5}).$$

Die absoluten Werte der Koeffizienten von Δu_0 und Δu_{-5} erhält man aus der folgenden Tabelle:

t	Koeffizient von Δu_0	Koeffizient von $\Delta^2 u_{-5}$
1	0·2	0·08
2	0·4	0·12
3	0·6	0·12
4	0·8	0·08

$d = 0{\cdot}0338164.$

renten auf zwei Leben nach der Rentner- sellschaften (Männer und Frauen).

Alter des Mannes x	Die Frau ist jünger um 5 Jahre $a_{x:x-5}$	10 Jahre $a_{x:x-10}$	15 Jahre $a_{x:x-15}$	20 Jahre $a_{x:x-20}$	25 Jahre $a_{x:x-25}$	30 Jahre $a_{x:x-30}$	35 Jahre $a_{x:x-35}$	40 Jahre $a_{x:x-40}$	Alter des Mannes x
75	5·040	5·433	5·684	5·825	5·911	5·980	6·041	6·093	75
76	4·790	5·177	5·430	5·572	5·656	5·720	5·777	5·827	76
77	4·549	4·928	5·181	5·325	5·407	5·466	5·519	5·566	77
78	4·316	4·685	4·938	5·084	5·164	5·220	5·269	5·312	78
79	4·092	4·450	4·701	4·848	4·928	4·980	5·026	5·066	79
80	3·878	4·223	4·471	4·619	4·699	4·748	4·790	4·827	80
81	3·673	4·005	4·248	4·396	4·476	4·524	4·561	4·596	81
82	3·477	3·796	4·032	4·181	4·261	4·306	4·341	4·373	82
83	3·291	3·595	3·824	3·972	4·053	4·097	4·129	4·158	83
84	3·114	3·404	3·624	3·771	3·852	3·895	3·924	3·951	84
85	2·946	3·221	3·433	3·577	3·658	3·701	3·728	3·752	85
86	2·788	3·048	3·251	3·391	3·472	3·514	3·540	3·561	86
87	2·638	2·884	3·077	3·213	3·294	3·336	3·360	3·379	87
88	2·497	2·729	2·912	3·043	3·123	3·165	3·188	3·205	88
89	2·364	2·582	2·755	2·881	2·960	3·002	3·024	3·040	89
90	2·240	2·445	2·608	2·727	2·805	2·847	2·868	2·882	90
91	2·123	2·315	2·468	2·582	2·657	2·699	2·720	2·733	91
92	2·014	2·194	2·338	2·445	2·517	2·558	2·579	2·591	92
93	1·912	2·080	2·215	2·316	2·385	2·425	2·446	2·457	93
94	1·818	1·974	2·099	2·194	2·260	2·300	2·320	2·331	94
95	1·730	1·875	1·992	2·080	2·143	2·181	2·202	2·212	95
96	1·649	1·783	1·892	1·974	2·033	2·070	2·090	2·100	96
97	1·574	1·697	1·798	1·875	1·930	1·965	1·985	1·995	97
98	1·505	1·619	1·712	1·782	1·833	1·867	1·886	1·895	98
99	1·441	1·546	1·631	1·696	1·743	1·774	1·792	1·801	99
100	1·383	1·478	1·555	1·614	1·656	1·685	1·702	1·711	100
101	1·329	1·413	1·481	1·533	1·570	1·595	1·610	1·618	101
102	1·274	1·345	1·401	1·442	1·472	1·492	1·504	1·511	102
103	1·201	1·247	1·282	1·307	1·325	1·337	1·344	1·348	103
104									104

Beispiele: 1. Es wäre der Barwert der Verbindungsrente eines Ehepaares, von welchem der Mann 40 Jahre und die Frau 33 Jahre alt ist, zu berechnen:

In diesem Falle ist:

$$u_{-5} = a_{40:25} = 15{\cdot}456$$

$$u_0 = a_{40:30} = 15{\cdot}166 \quad {}^{-0{\cdot}290}$$

$$u_{+5} = a_{40:35} = 14{\cdot}788 \quad {}^{-0{\cdot}378} \quad -\,0{\cdot}088$$

Man erhält, da $t = 3$ ist:

$$a_{40:33} = 15{\cdot}166 + (0{\cdot}6 \,.\, -0{\cdot}378) - (0{\cdot}12 \,.\, -0{\cdot}088) = 15{\cdot}166 - 0{\cdot}227 + 0{\cdot}011$$

$$a_{40:33} = 14{\cdot}950.$$

2. Ist der Mann 48 Jahre und die Frau 51 Jahre alt, so nimmt man, um die Verbindungsrente $a_{48:51}$ berechnen zu können, das Leben der Frau als das ältere Leben und erhält:

$$u_{-5} = a^{F\;M}_{51:41} = 12{\cdot}791$$

$$u_0 = a^{F\;M}_{51:46} = 12{\cdot}199 \quad {}^{-0{\cdot}592} \quad -\,0{\cdot}179$$

$$u_{+5} = a^{F\;M}_{51:51} = 11{\cdot}428 \quad {}^{-0{\cdot}771}$$

$$a^{F\;M}_{51:48} = 12{\cdot}199 + (0{\cdot}4 \,.\, -0{\cdot}771) - (0{\cdot}12 \,.\, -0{\cdot}179) = 12{\cdot}199 - 0{\cdot}308 + 0{\cdot}021$$

$$a_{48:51} = 11{\cdot}912.$$

$d = 0{\cdot}0338164.$

TABELLE X. Sterbetafel H^M der 20 britischen Gesellschaften.

x	l_x	D_x	N_x	S_x	x
0	127 283	127 283	2815 804	61 758 474	0
1	112 925	109 636	2688 021	58 943 170	1
2	108 963	102 708	2578 385	56 255 149	2
3	106 588	97 544	2475 677	53 676 764	3
4	104 942	93 240	2378 183	51 201 087	4
5	103 617	89 380	2284 893	48 822 954	5
6	102 556	85 889	2195 513	46 538 061	6
7	101 704	82 695	2109 624	44 342 548	7
8	101 021	79 746	2026 929	42 232 924	8
9	100 464	76 996	1947 183	40 205 995	9
10	100 000	74 410	1870 187	38 258 812	10
11	99 592	71 947	1795 777	36 388 625	11
12	99 223	69 592	1723 830	34 592 848	12
13	98 877	67 332	1654 238	32 869 018	13
14	98 540	65 146	1586 906	31 214 780	14
15	98 203	63 032	1521 760	29 627 874	15
16	97 813	60 972	1458 728	28 106 114	16
17	97 459	58 964	1397 756	26 647 386	17
18	97 034	56 997	1338 792	25 249 630	18
19	96 569	55 072	1281 795	23 910 838	19
20	96 061	53 188	1226 723	22 629 043	20
21	95 513	51 343	1173 535	21 402 320	21
22	94 931	49 544	1122 192	20 228 785	22
23	94 322	47 791	1072 648	19 106 593	23
24	93 691	46 090	1024 857	18 033 945	24
25	93 044	44 439	978 767	17 009 088	25
26	92 386	42 839	934 328	16 030 321	26
27	91 722	41 291	891 489	15 095 993	27
28	91 049	39 796	850 198	14 204 504	28
29	90 371	38 349	810 402	13 354 306	29
30	89 685	36 949	772 053	12 543 904	30
31	88 994	35 597	735 104	11 771 851	31
32	88 294	34 288	699 507	11 036 747	32
33	87 585	33 022	665 219	10 337 240	33
34	86 866	31 797	632 197	9 672 021	34
35	86 137	30 612	600 400	9 039 824	35
36	85 395	29 464	569 788	8 439 424	36
37	84 639	28 352	540 324	7 869 636	37
38	83 869	27 277	511 972	7 329 312	38
39	83 083	26 234	484 695	6 817 340	39
40	82 277	25 223	458 461	6 332 645	40
41	81 454	24 243	433 238	5 874 184	41
42	80 608	23 293	408 995	5 440 946	42
43	79 737	22 370	385 702	5 031 951	43
44	78 842	21 474	363 332	4 646 249	44
45	77 918	20 604	341 858	4 282 917	45
46	76 964	19 760	321 254	3 941 059	46
47	75 978	18 938	301 494	3 619 805	47
48	74 957	18 139	282 556	3 318 311	48
49	73 896	17 362	264 417	3 035 755	49
50	72 795	16 605	247 055	2 771 338	50
51	71 651	15 868	230 450	2 524 283	51
52	70 458	15 149	214 582	2 293 833	52
53	69 215	14 449	199 433	2 079 251	53
54	67 919	13 765	184 984	1 879 818	54

$d = 0{\cdot}0291262.$

TABELLE X. Sterbetafel H^M der 20 britischen Gesellschaften.

x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x	x
0	13989·8	45 284·	1016 517·2	22·118	0·355 77	0
1	3734·6	31 844·2	971 233·2	24·518	·285 89	1
2	2173·5	27 609·6	939 889·0	25·104	·268 82	2
3	1462·4	25 436·1	912 279·4	25·380	·260 77	3
4	1143·0	23 973·7	886 848·3	25·506	·257 12	4
5	888·59	22 830·68	862 869·57	25·564	0·255 43	5
6	692·76	21 942·09	840 038·89	25·562	·255 47	6
7	539·16	21 249·33	818 096·80	25·511	·256 96	7
8	426·89	20 710·17	796 847·47	25·417	·259 70	8
9	345·26	20 283·28	776 137·30	25·289	·263 43	9
10	294·75	19 938·02	755 854·02	25·134	0·267 95	10
11	258 81	19 643·27	735 916·00	24·960	·273 02	11
12	235·61	19 384·46	716 272·73	24 770	·278 55	12
13	222·80	19 148·85	696 888·27	24·569	·284 40	13
14	216·31	18 926·05	677 739·42	24·359	·290 52	14
15	224·34	18 709·74	658 813·37	24·142	0·296 83	15
16	232·33	18 485·40	640 103·63	23·924	·303 17	16
17	249·64	18 253·07	621 618·23	23·705	·309 56	17
18	265·18	18 003·43	603 365 16	23·489	·315 86	18
19	281·27	17 738·25	585 361·73	23·275	·322 08	19
20	294·58	17 456·98	547 623·48	23·064	0·328 22	20
21	303·74	17 162·40	550 166·50	22·857	·334 26	21
22	308 57	16 858·66	533 004·10	22·650	·340 28	22
23	310·41	16 550·09	516 145·44	22·444	·346 30	23
24	309·01	16 239·68	499 595·35	22 236	·352 35	24
25	305·11	15 930·67	483 855·67	22·025	0·358 49	25
26	298 92	15 625·56	467 425·00	21·810	·364 76	26
27	294·16	15 326·64	451 799·44	21·590	·371 19	27
28	287·71	15 032·48	436 472·80	21·364	·377 73	28
29	282·62	14 744·77	421 440·32	21·132	·384 49	29
30	276·39	14 462·15	406 695·55	20·895	0·391 41	30
31	271·84	14 185·76	392 233·40	20·651	·398 52	31
32	267·31	13 913·92	378 047·64	20·401	·405 80	32
33	263·18	13 646·61	364 133·72	20·145	·413 28	33
34	259·08	13 383·43	350 487·11	19·882	·420 89	34
35	256·01	13 124·35	337 103·68	19·613	0·428 73	35
36	253·24	12 868·34	323 979·33	19·338	·436 74	36
37	250·43	12 615·10	311 110·99	19·057	·444 94	37
38	248·18	12 364 67	298 495·89	18 770	·453 31	38
39	247·09	12 116·49	286 131·22	18·476	·461 85	39
40	244·95	11 869·40	274 014·73	18·177	0·470 57	40
41	244 46	11 624·45	262 145·33	17·871	·479 49	41
42	244·35	11 379·99	250 520·88	17·559	·488 56	42
43	243·77	11 135 64	239 140·89	17·242	·497 82	43
44	244 34	10 891·87	228 005·25	16·919	·507 21	44
45	244·93	10 647·53	217 113·88	16·591	0·516 77	45
46	245·77	10 402·60	206 465·85	16·258	·526 48	46
47	247·08	10 156·83	196 063·25	15·920	·536 33	47
48	249·29	9 909 75	185 906·42	15·577	·546 31	48
49	251·15	9 660·46	175 996·67	15·230	·556 42	49
50	253 86	9 409·31	166 336 21	14·878	0 566 66	50
51	256·51	9 155·95	156 926·90	14·523	·577 02	51
52	259·48	8 899·44	147 770·95	14·164	·587 45	52
53	262·66	8 639·96	138 871·51	13·803	·597 97	53
54	266·23	8 377·30	130 231·55	13·459	·608 58	54

$d = 0{\cdot}0291262.$

H^M TABELLE X. Sterbetafel H^M der 20 britischen Gesellschaften. 3%

x	l_x	D_x	N_x	S_x	x
55	66566	13098·	171 219·	1694 834·	55
56	65152	12447·	158 121·	1523 615·	56
57	63677	11810·	145 674·	1365 494·	57
58	62136	11189·	133 864·	1219 820·	58
59	60524	10581·	122 675·	1085 956·	59
60	58842	9987·6	112 093·8	963 280·6	60
61	57087	9407·4	102 106·2	851 186·8	61
62	55257	8840·6	92 698·8	749 080·6	62
63	53351	8286·9	83 858·2	656 381·8	63
64	51368	7746·6	75 571·3	572 523·6	64
65	49309	7219·5	67 824·7	496 952·3	65
66	47176	6705·9	60 605·2	429 127·6	66
67	44972	6206·5	53 899 3	368 522·4	67
68	42699	5721·2	47 692·8	314 623·1	68
69	40365	5251·0	41 971·6	266 930·3	69
70	37977	4796·3	36 720·6	224 958·7	70
71	35543	4358·2	31 924·3	188 238·1	71
72	33075	3937·5	27 566·1	156 313·8	72
73	30585	3535·0	23 628·6	128 747·7	73
74	28089	3152·0	20 093·6	105 119·1	74
75	25602	2789·2	16 941·6	85 025·5	75
76	23143	2447·9	14 152·4	68 083·9	76
77	20731	2128·9	11 704·5	53 931·5	77
78	18388	1833·3	9 575·6	42 227·0	78
79	16133	1561·6	7 742·3	32 651·4	79
80	13987	1314·4	6 180·7	24 909·1	80
81	11969	1092·0	4 866·3	18 728·4	81
82	10096	894·33	3 774·27	13 862·06	82
83	8384	721·04	2 879·94	10 087·79	83
84	6844	571·45	2 158·90	7 207·85	84
85	5483	444·49	1 587·45	5 048·95	85
86	4303	338·66	1 142·96	3 461·50	86
87	3301	252·24	804·30	2 318·54	87
88	2471	183·31	552·06	1 514·24	88
89	1800	129·65	368·75	962·18	89
90	1273	89·018	239·100	593·425	90
91	871	59·133	150·082	354·325	91
92	575	37·901	90·949	204·243	92
93	366	23·422	53·048	113·294	93
94	222	13·793	29·626	60·246	94
95	129	7·781	15·833	30·620	95
96	71	4·158	8·052	14·787	96
97	37	2·104	3·894	6·735	97
98	19	1·049	1·790	2·841	98
99	9	0·482	0·741	1·051	99
100	4	0·208	0·259	0·310	100
101	1	0·051	0·051	0·051	101
102	0				102

$d = 0·0291262.$

3% TABELLE X. Sterbetafel H^M der 20 britischen Gesellschaften. H^M

x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x	x
55	270·13	8111·07	121 854·25	13·072	0·61927	55
56	273·57	7840·94	113 743·18	12·704	·62997	56
57	277·49	7567·37	105 902·24	12·335	·64075	57
58	281·82	7289·88	98 334·87	11·964	·65154	58
59	285·50	7008·06	91 044·99	11·594	·66232	59
60	289·21	6722·56	84 036·93	11·223	0·67310	60
61	292·78	6433·35	77 314·37	10·854	·68386	61
62	296·05	6140·57	70 881·02	10·486	·69459	62
63	299·05	5844·52	64 740·45	10·119	·70528	63
64	301·47	5545·47	58 895·93	9·755	·71586	64
65	303·20	5244·00	53 350·46	9·395	0·72636	65
66	304·17	4940·80	48 106·46	9·037	·73678	66
67	304·56	4636·63	43 165·66	8·684	·74705	67
68	303·62	4332·07	38 529·03	8·336	·75720	68
69	301·59	4028·45	34 196·96	7·993	·76718	69
70	298·46	3726·86	30 168·51	7·656	0·77703	70
71	293·81	3428·40	26 441·65	7·325	·78665	71
72	287·79	3134·59	23 013·25	7·001	·79609	72
73	280·09	2846·80	19 878·66	6·684	·80532	73
74	270·95	2566·71	17 031·86	6·375	·81431	74
75	260·09	2295·76	14 465·15	6·074	0·82310	75
76	247·69	2035·67	12 169·39	5·782	·83161	76
77	233·60	1787 98	10 133·72	5·498	·83989	77
78	218·28	1554·38	8 345·74	5·223	·84787	78
79	201·67	1336·10	6 791·36	4·958	·85558	79
80	184·12	1134·43	5 455·26	4·702	0·86304	80
81	165·92	950·31	4 320·83	4·456	·87022	81
82	147·23	784·39	3 370·52	4·220	·87706	82
83	128·58	637·16	2 586·13	3 994	·88367	83
84	110·33	508·58	1 948·97	3·778	·88998	84
85	92·871	398·246	1 440·392	3·571	0·89598	85
86	76·565	305·875	1 042·146	3·375	·90170	86
87	61·574	228·810	736·771	3·189	·90713	87
88	48·329	167 236	507·961	3·012	·91233	88
89	36·852	118·907	340·725	2·844	·91719	89
90	27·292	82·055	221·818	2·686	0·92179	90
91	19·511	54·763	139·763	2·538	·92610	91
92	13·375	35·252	85·000	2·400	·93010	92
93	8·9466	21·8765	49·7476	2 265	·93405	93
94	5·6097	12·9299	27·8711	2·148	·93745	94
95	3·3967	7·3202	14·9412	2·035	0·94074	95
96	1·9332	3·9235	7·6210	1·936	·94358	96
97	0·9936	1·9903	3·6975	1·851	·94608	97
98	·5359	0·9967	1·7072	1·706	·95030	98
99	·2602	·4608	0·7105	1·536	·95534	99
100	0·1515	0·2006	0·2497	1·243	0·96381	100
101	·0491	·0491	·0491	1·000	·97087	101

$d = 0·0291262.$

M u. WI

TABELLE XI. Sterbetafel M und WI der 23 deutschen Gesellschaften.

$3^1/_2\%$

x	l_x	D_x	$\frac{10000}{D_x}$	N_x	M_x	a_x	A_x	x
17	102 787	57 273·31	0·174 6014	1195 728·59	16 838·0368	20·877 59	0·298 9945	17
18	101 878	54 847·15	·182 3249	1138 455·28	16 348·6661	20·756 87	·298 0767	18
19	100 942	52 505·56	·190 4560	1083 608·13	15 861·8004	20·637 97	·302 0976	19
20	100 000	50 256·59	0·198 9789	1031 102·57	15 388·3833	20·516 77	0·306 1962	20
21	99 081	48 110·85	·207 8533	980 845·98	14 942·1436	20·387 21	·310 5773	21
22	98 173	46 057·92	·217 1179	932 735·13	14 516·1549	20·251 85	·315 1716	22
23	97 286	44 098·34	·226 7659	886 677·21	14 114·0906	20·106 82	·320 0592	23
24	96 425	42 230·01	·236 7984	842 578·87	13 737·0095	19·952 13	·325 2902	24
25	95 590	40 448·62	0·247 2272	800 348·86	13 383·6818	19·786 80	0·330 8810	25
26	94 774	38 747·18	·258 0833	759 900·24	13 050·0702	19·611 76	·336 8002	26
27	93 970	37 119·80	·269 4016	721 153·06	12 732·4804	19·427 98	·343 0152	27
28	93 173	35 559·88	·281 2158	684 033·76	12 428·3019	19·236 11	·349 5034	28
29	92 378	34 064·22	·293 5632	648 473·88	12 135·1471	19·036 81	·356 2431	29
30	91 578	32 627·26	0·306 4922	614 409·66	11 850·1244	18·831 18	0·363 1968	30
31	90 770	31 245·79	·320 0431	581 782·40	11 571·9862	18·619 54	·370 3536	31
32	89 952	29 917·11	·334 2569	550 536·61	11 293·9278	18·402 07	·377 7076	32
33	89 121	28 638·38	·349 1818	520 619·50	11 032·8920	18·179 09	·385 2480	33
34	88 280	27 408·83	·364 8459	491 981·12	10 771·7816	17·949 73	·393 0041	34
35	87 424	26 225·18	0·381 3129	464 572·29	10 515·0014	17·714 74	0·400 9508	35
36	86 551	25 085·31	·398 6397	438 347·11	10 261·9775	17·474 26	·409 0829	36
37	85 662	23 988·07	·416 8739	413 261·80	10 013·0294	17·227 81	·417 4169	37
38	84 756	22 931·74	·436 0768	389 278·73	9 767·9003	16·975 32	·425 9553	38
39	83 828	21 913·69	·456 3357	366 341·99	9 525·3095	16·717 49	·434 6741	39
40	82 878	20 932·70	0·477 7215	344 428·30	9 285·3656	16·454 08	0·443 5818	40
41	81 903	19 986·90	·500 3277	323 495 60	9 047·4350	16·185 38	·452 6682	41
42	80 897	19 073·82	·524 2788	303 508·70	8 810·2412	15·912 32	·461 9022	42
43	79 862	18 193·03	·549 6611	284 434·88	8 574·4621	15·634 28	·471 3044	43
44	78 799	17 343·84	·576 5786	266 241·85	8 340·4931	15·350 80	·480 8907	44
45	77 707	16 525·11	0·605 1397	248 898·01	8 108·2696	15·061 81	0·490 6633	45
46	76 590	15 736 79	·635 4536	232 372·90	7 878·7620	14·766 22	·500 6592	46
47	75 450	14 978·31	·667 6321	216 636·11	7 652·4495	14·463 32	·510 9022	47
48	74 281	14 247·58	·701 8736	201 657·80	7 428·2277	14·158 83	·521 3679	48
49	73 077	13 542·64	·738 4085	187 410·22	7 205·1022	13·838 53	·532 0308	49
50	71 831	12 861·58	0·777 5095	173 867·58	6 982 0017	13·518 37	0·542 8570	50
51	70 528	12 201·23	·819 5895	161 006·00	6 756·5848	13·195 88	·553 7625	51
52	69 166	11 560·97	·864 9793	148 804·77	6 528·0290	12·871 30	·564 7386	52
53	67 741	10 939·89	·914 0860	137 243·80	6 298·7973	12·545 26	·575 7641	53
54	66 251	10 337·45	·967 3566	126 303·91	6 066·3056	12·218 09	·586 8278	54
55	64 695	9 753·295	1·025 295	115 966·463	5 831·7260	11·889 98	0·597 9233	55
56	63 074	9 187·359	1·088 452	106 213·168	5 595·6111	11·560 79	·609 0554	56
57	61 383	8 638·694	1·157 582	97 025·809	5 357·6294	11·231 53	·620 1897	57
58	59 624	8 107·385	1·233 443	88 387·115	5 118·4490	10·902 05	·631 3316	58
59	57 792	7 592·540	1·317 082	80 279·730	4 877·7663	10 573 50	·642 4419	59
60	55 892	7 094·612	1·409 520	72 687·190	4 636·5911	10·245 41	0·653 5368	60
61	53 916	6 612·355	1·512 320	65 592·578	4 394·2509	9·919 700	·664 5512	61
62	51 878	6 147·258	1·626 742	58 980·223	4 152·7591	9·594 558	·675 5463	62
63	49 781	5 699·302	1·754 601	52 832·965	3 912·6788	9·270 077	·686 5191	83
64	47 632	5 268·857	1·897 945	47 138·663	3 674·9652	8·945 710	·697 4881	64

$d = 0·0338164.$

$3^1/_2\%$

TABELLE XI. Sterbetafel M und WI der 23 deutschen Gesellschaften.

M u. WI

x	l_x	D_x	$\frac{10000}{D_x}$	N_x	M_x	a_x	A_x	x
65	45 435	4855·879	2·059 359	41 864·806	3440·160 2	8·621 467	0·708 4528	65
66	43 189	4459·744	2·242 281	37 008·927	3208·235 8	8·298 441	·719 3763	66
67	40 887	4079·263	2·451 423	32 549·183	2978·567 1	7·979 182	·730 1726	67
68	38 532	3714·308	2·692 292	28 469·920	2751·555 9	7·664 934	·740 7993	68
69	36 133	3365·269	2·971 581	24 755·612	2528·123 6	7·356 207	·751 2393	69
70	33 701	3032·622	3·297 477	21 390·343	2809·277 4	7·058 416	0·761 4790	70
71	31 249	2716·885	3·680 686	18 357·721	2096·092 9	6·756 901	·771 5057	71
72	28 794	2418·782	4·134 312	15 640·836	1889·865 5	6·466 410	·781 3292	72
73	26 358	2139·276	4·674 479	13 222·054	1692·154 1	6·180 621	·790 9935	73
74	23 952	1878·261	5·324 074	11 082·778	1503·481 1	5·900 558	·800 4643	74
75	21 592	1635·937	6·112 705	9 204·517	1324·673 6	5·626 450	0·809 7335	75
76	19 293	1412·321	7·080 543	7 568·580	1156·378 1	5·358 966	·818 7787	76
77	17 083	1208·252	8·276 419	6 156·259	1000·068 6	5·095 178	·827 6993	77
78	14 980	1023·681	9·768 668	4 948·007	856·356 9	4·833 544	·836 5468	78
79	12 998	858·2007	11·652 29	8 924·3268	725·494 2	4·572 739	·845 3663	79
80	11 150	711·2908	14·058 95	3 066·1261	607·604 9	4·310 651	0·854 2292	80
81	9 420	580·6074	17·223 84	2 354·8353	500·975 37	4·055 813	·862 8469	81
82	7 821	465·7507	21·470 71	1 774·2279	405·752 84	3·809 394	·871 1799	82
83	6 378	366·9742	27·249 87	1 308·4772	322·726 23	3·565 584	·879 4247	83
84	5 114	284·2965	35·174 54	941·5030	252·458 19	3·311 694	·888 0103	84
85	4 034	216·6738	46·152 83	657·2065	194·449 34	3·033 161	0·897 4287	85
86	3 138	162·8481	61·406 92	440·5327	147·950 97	2·705 176	·908 5206	86
87	2 423	121·4907	82·310 83	277·6846	112·100 44	2·285 645	·922 7076	87
88	1 857	89·96237	111·157 59	156·19399	84·680 57	1·736 215	·941 2874	88
89	1 415	66·23162	150·985 28	66·23162	63·991 96	1·000 000	·966 1836	89

$d = 0·0338164.$

O^M TABELLE XII a. Sterbetafel O^M der 60 britischen Gesellschaften. $3^1/_2\%$

x	l_x	D_x	N_x	S_x	M_x	R_x	a_x	x
10	100 000	70 892	1658 426	3245 4390	14 810·00	560 935·86	23·393	10
11	99 662	68 263	1587 534	3079 5964	14 578·49	546 125·86	23·256	11
12	99 322	65 730	1519 271	2920 8430	14 353·48	531 547·37	23·114	12
13	98 979	63 288	1453 541	2768 9159	14 134·16	517 193·89	22·967	13
14	98 633	60 934	1390 253	2623 5618	13 920·41	503 059·73	22 816	14
15	98 284	58 665	1329 319	2484 5365	13 712·10	489 139·32	22·660	15
16	97 930	56 477	1270 654	2351 6046	13 507·94	475 427·22	22·499	16
17	97 571	54 367	1214 177	2224 5392	13 307·90	461 919·28	22·333	17
18	97 205	52 331	1159 810	2103 1215	13 110·86	448 611·38	22·163	18
19	96 833	50 368	1107 479	1987 1405	12 917 86	435 500·52	21·987	19
20	96 453	48 474	1057 111	1876 3926	12 726·38	422 583·16	21·808	20
21	96 063	46 646	1008 637	1770 6815	12 537·01	409 856·78	21·623	21
22	95 663	44 880	961 991	1669 8178	12 349·35	397 319·77	21·434	22
23	95 251	43 176	917 111	1573 6187	12 162·60	384 970·42	21·241	23
24	94 826	41 530	873 935	1481 9076	11 976·47	372 807·82	21·044	24
25	94 387	39 940	832 405	1394 5141	11 790·71	360 831·35	20·842	25
26	93 933	38 403	792 465	1311 2736	11 605·10	349 040·64	20·635	26
27	93 463	36 919	754 062	1232 0271	11 419·44	337 435 54	20 425	27
28	92 974	35 481	717 148	1156 6209	11 232·81	326 016·10	20·211	28
29	92 468	34 097	681 659	1084 9066	11 046·22	314 783·29	19·992	29
30	91 942	32 757	647 562	1016 7407	10 858·82	303 737·07	19·769	30
31	91 395	31 461	614 805	951 9845	10 670·52	292 878·25	19 542	31
32	90 828	30 209	583 344	890 5040	10 481·94	282 207·73	19·311	32
33	90 239	28 998	553 135	832 1696	10 292·67	271 725·79	19·075	33
34	89 628	27 827	524 137	776 8561	10 102·97	261 433·12	18·835	34
35	88 995	26 696	496 310	724 4424	9 913·09	251 330·15	18·591	35
36	88 338	25 603	469 614	674 8114	9 722·67	241 417·06	18·342	36
37	87 657	24 547	444 011	627 8500	9 531·97	231 694·39	18·088	37
38	86 952	23 526	419 464	583 4489	9 311·22	222 162·42	17 830	38
39	86 223	22 540	395 938	511 5025	9 150·65	212 821·20	17·566	39
40	85 467	21 587	373 398	501 9087	8 959·70	203 670·55	17·298	40
41	84 685	20 666	351 811	464 5689	8 768·87	194 710 85	17·024	41
42	83 875	19 776	331 145	429 3878	8 577·80	185 941·98	16·745	42
43	83 035	18 916	311 369	396 2733	8 386 53	177 364·09	16·461	43
44	82 165	18 085	292 453	365 1364	8 195·04	168 977·56	16 172	44
45	81 262	17 281	274 368	335 8911	8 003·01	160 782·52	15·877	45
46	80 325	16 504	257 087	308 4543	7 810·49	152 779·51	15·577	46
47	79 351	15 753	240 583	282 7456	7 617·13	144 969·02	15·272	47
48	78 338	15 026	224 830	258 6878	7 422·83	137 351·89	14 963	48
49	77 284	14 322	209 804	236 2043	7 227·50	129 929·06	14·649	49
50	76 185	13 641	195 482	215 2239	7 030·72	122 701·56	14·330	50
51	75 0[illegible]9	12 982	181 841	195 6757	6 832·46	115 670·84	14·008	51
52	73 842	12 343	168 859	177 4916	6 632·38	108 838·38	13·681	52
53	72 592	11 723	156 516	160 6057	6 430·51	102 206·00	13 351	53
54	71 286	11 123	144 793	144 9541	6 226·73	95 775 49	13·017	54
55	69 919	10 541	133 670	130 4748	6 020·64	89 548·[illegible]6	12·681	55
56	68 489	9 976·1	123 129·4	117 1077·9	5 812·34	83 528 12	12·343	56
57	66 993	9 428·2	113 153·3	104 7948·5	5 601·80	77 715·78	12·001	57
58	65 427	8 896·4	103 725·1	93 4795·2	5 388·86	72 113 98	11·659	58
59	63 788	8 380·3	94 828·7	83 1070·1	5 173·53	66 725·12	11·316	59

$d = 0·0338164.$

$3^1/_2\%$ TABELLE XII a. Sterbetafel O^M der 60 britischen Gesellschaften. O^M

x	l_x	D_x	N_x	S_x	M_x	R_x	a_x	x
60	62 073	7879·2	86 448·4	736 241·4	4955·84	61 551·59	10·972	60
61	60 281	7393·0	78 569·2	649 793·0	4736·06	56 595·75	10·627	61
62	58 409	6921·1	71 176·2	571 223·8	4514·24	51 859·69	10 284	62
63	56 456	6463·5	64 255·1	500 047·6	4290·65	47 345·45	9·941	63
64	54 422	6019·9	57 791·6	435 792·5	4065·66	43 054·80	9·600	64
65	52 307	5590·3	51 771·7	378 000·9	3839·62	38 989·14	9·261	65
66	50 112	5174·6	46 181·4	326 229·2	3612·96	35 149·52	8·925	66
67	47 841	4773·1	41 006·8	280 047 8	3386·38	31 536·56	8·591	67
68	45 497	4385·7	36 233·7	239 041·0	3160·43	28 150·18	8·262	68
69	43 086	4012·8	31 848·0	202 807 3	2935·88	24 989·75	7·937	69
70	40 615	3654·8	27 835·2	170 959·3	2713·52	22 053·87	7·616	70
71	38 094	3312 0	24 180·4	143 124·1	2494·34	19 340·35	7·301	71
72	35 533	2984·9	20 868·4	118 943·7	2279·21	16 846·01	6·991	72
73	32 946	2674·0	17 883·5	98 075·3	2069·24	14 566·80	6·688	73
74	30 346	2379·7	15 209·5	80 191·8	1865·35	12 497·56	6·391	74
75	27 752	2102·7	12 829·8	64 982 3	1668 81	10 632·21	6·102	75
76	25 181	1843·4	10 727·1	52 152·5	1480·60	8 963·40	5·819	76
77	22 652	1602·1	8 883·7	41 425·4	1301·73	7 482·80	5·545	77
78	20 187	1379 5	7 281·6	32 541·7	1133·28	6 181·07	5·278	78
79	17 806	1175·7	5 902·1	25 260·1	976·07	5 047·79	5·020	79
80	15 530	990·71	4 726·35	19 357·97	830·88	4 071·72	4·771	80
81	13 380	824·69	3 735·64	14 631·62	698·36	3 240·84	4·530	81
82	11 373	677·28	2 910·95	10 895·98	578·84	2 542·48	4·298	82
83	9 526	548·10	2 233·67	7 985·03	472·568	1 963·642	4·075	83
84	7 852	436·51	1 685·57	5 751·36	379·507	1 491·074	3·861	84
85	6 359	341·55	1 249·06	4 065·79	299·315	1 111·567	3·657	85
86	5 051	262·13	907·51	2 816·73	231·435	812·252	3·462	86
87	3 929	197·00	645·38	1 909·22	175·178	586·817	3·276	87
88	2 986	144·66	448·38	1 263·84	129·494	405·639	3·100	88
89	2 213	103·58	303·72	815·46	93·312	276 145	2·932	89
90	1 596	72 177	200·138	511·738	65·409	182·833	2 773	90
91	1 116	48·763	127·961	311·600	44·436	117·424	2·621	91
92	756	31·916	79·198	183·639	29·238	72·988	2·481	92
93	493	20·109	47·282	104·441	18·5103	43·7503	2·351	93
94	310	12·217	27·173	57·159	11·2982	25·2400	2·224	94
95	186	7·0824	14·9557	29·9858	6·5766	13·9418	2·112	95
96	107	3·9365	7·8738	15·0301	3·6702	7·3652	2·000	96
97	58	2·0616	3·9368	7·1568	1·9285	3·6950	1·910	97
98	30	1·0303	1·8752	3·2200	0·9669	1·7665	1·820	98
99	15	0·4977	0·8449	1·3448	0·4692	0·7996	1·698	99
100	7	0·2214	0·3472	0·4999	0·2127	0·3304	1·547	100
101	3	0·0929	0·1228	0·1527	0·0888	0·1177	1·322	101
102	1	0·0299	0·0299	0·0299	0·0289	0·0289	1·000	102

$d = 0·0338164.$

O^M $3\frac{1}{2}\%$ TABELLE XII b. Barwerte der Verbindungsrenten auf zwei Leben nach der Sterbetafel O^M der 60 britischen Gesellschaften. $3\frac{1}{2}\%$ O^M

Alter des jüngeren Lebens x	a_{xy}									Alter des jüngeren Lebens x
	$y=x$	$y=x+1$	$y=x+2$	$y=x+3$	$y=x+4$	$y=x+5$	$y=x+6$	$y=x+7$	$y=x+8$	
10	20·094	20·914	20·829	20·738	20·643	20·543	20·438	20·327	20·212	10
11	20·835	20·752	20·663	20·570	20·472	20·369	20·261	20·147	20·029	11
12	20·670	20·584	20·493	20·397	20·296	20·190	20·078	19·962	19·840	12
13	20·500	20·411	20·317	20·219	20·114	20·005	19·891	19·771	19·647	13
14	20·324	20·233	20·136	20·034	19·927	19·815	19·698	19·575	19·448	14
15	20·143	20·049	19·949	19·814	19·735	19·620	19·500	19·374	19·244	15
16	19·956	19·859	19·757	19·650	19·537	19·420	19·297	19·169	19·036	16
17	19·764	19·665	19·560	19·450	19·335	19·215	19·089	18·959	18·823	17
18	19·568	19·465	19·358	19·245	19·128	19·005	18·877	18·744	18·606	18
19	19·366	19·261	19·151	19·036	18·916	18·791	18·660	18·525	18·384	19
20	19·159	19·051	18·939	18·821	18·699	18·572	18·439	18·301	18·158	20
21	18·947	18·837	18·723	18·603	18·479	18·348	18·214	18·074	17·928	21
22	18·731	18·619	18·503	18·380	18·254	18·122	17·985	17·842	17·695	22
23	18·510	18·397	18·278	18·154	18·025	17·892	17·752	17·607	17·458	23
24	18·286	18·170	18·049	17·923	17·793	17·657	17·516	17·369	17·217	24
25	18·058	17·940	17·818	17·690	17·557	17·419	17·276	17·127	16·972	25
26	17·826	17·707	17·583	17·453	17·318	17·178	17·032	16·882	16·725	26
27	17·591	17·470	17·343	17·212	17·076	16·934	16·786	16·633	16·474	27
28	17·352	17·230	17·102	16·969	16·830	16·687	16·536	16·380	16·219	28
29	17·110	16·986	16·857	16·722	16·582	16·436	16·283	16·125	15·961	29
30	16·865	16·740	16·609	16·472	16·330	16·181	16·027	15·867	15·699	30
31	16·618	16·491	16·358	16·219	16·075	15·924	15·767	15·604	15·434	31
32	16·367	16·238	16·104	15·963	15·816	15·664	15·504	15·338	15·166	32
33	16·113	15·982	15·846	15·703	15·555	15·400	15·238	15·069	14·893	33
34	15·856	15·723	15·585	15·441	15·290	15·133	14·968	14·796	14·618	34
35	15·596	15·462	15·322	15·175	15·021	14·861	14·694	14·520	14·338	35
36	15·332	15·196	15·054	14·905	14·750	14·587	14·417	14·239	14·055	36
37	15·065	14·927	14·783	14·632	14·474	14·309	14·136	13·956	13·768	37
38	14·794	14·654	14·508	14·355	14·194	14·026	13·851	13·668	13·478	38
39	14·519	14·378	14·229	14·074	13·911	13·740	13·562	13·376	13·183	39
40	14·242	14·098	13·947	13·789	13·624	13·451	13·270	13·081	12·886	40
41	13·959	13·814	13·661	13·500	13·332	13·157	12·974	12·783	12·585	41
42	13·673	13·525	13·371	13·208	13·038	12·860	12·674	12·481	12·280	42
43	13·383	13·233	13·077	12·912	12·740	12·560	12·372	12·176	11·973	43
44	13·089	12·938	12·779	12·612	12·438	12·256	12·066	11·869	11·664	44
45	12·792	12·639	12·478	12·309	12·133	11·949	11·757	11·558	11·352	45
46	12·491	12·336	12·174	12·003	11·825	11·640	11·446	11·246	11·038	46
47	12·187	12·031	11·866	11·695	11·515	11·328	11·133	10·931	10·722	47
48	11·880	11·722	11·557	11·383	11·202	11·014	10·818	10·615	10·406	48
49	11·570	11·411	11·244	11·070	10·888	10·698	10·502	10·298	10·088	49
50	11·258	11·098	10·930	10·754	10·572	10·382	10·185	9·980	9·770	50
51	10·944	10·783	10·614	10·438	10·255	10·064	9·867	9·663	9·452	51
52	10·628	10·467	10·297	10·121	9·937	9·746	9·549	9·345	9·135	52
53	10·312	10·149	9·980	9·803	9·619	9·429	9·232	9·029	8·820	53
54	9·994	9·831	9·662	9·485	9·302	9·112	8·916	8·714	8·506	54
55	9·676	9·514	9·344	9·168	8·985	8·796	8·601	8·401	8·195	55
56	9·359	9·197	9·028	8·852	8·671	8·483	8·289	8·090	7·886	56
57	9·042	8·880	8·712	8·538	8·358	8·171	7·979	7·782	7·581	57
58	8·727	8·566	8·399	8·226	8·047	7·863	7·673	7·478	7·279	58
59	8·413	8·254	8·088	7·917	7·740	7·558	7·370	7·179	6·983	59

$d = 0{\cdot}0338164.$

Alter des jüngeren Lebens x	a_{xy}									Alter des jüngeren Lebens x
	$y=x+9$	$y=x+10$	$y=x+15$	$y=x+20$	$y=x+25$	$y=x+30$	$y=x+35$	$y=x+40$	$y=x+45$	
10	20·092	20·966	19·260	18·429	17·474	16·384	15·147	13·764	12·256	10
11	19·905	19·776	19·054	18·208	17·235	16·124	14·863	13·457	11·934	11
12	19·713	19·581	18·844	17·983	16·992	15·858	14·574	13·148	11·608	12
13	19·517	19·381	18·630	17·753	16·743	15·587	14·280	12·833	11·282	13
14	19·315	19·177	18·412	17·519	16·490	15·312	13·981	12·516	10·953	14
15	19·109	18·968	18·188	17·280	16·231	15·030	13·677	12·195	10·624	15
16	18·898	18·754	17·961	17·037	15·968	14·744	13·370	11·872	10·294	16
17	18·682	18·536	17·730	16·788	15·699	14·452	13·058	11·546	9·964	17
18	18·462	18·314	17·494	16·535	15·424	14·156	12·743	11·218	9·635	18
19	18·238	18·087	17·253	16·277	15·146	13·856	12·424	10·889	9·306	19
20	18·010	17·856	17·009	16·015	14·862	13·551	12·103	10·559	8·980	20
21	17·778	17·622	16·760	15·748	14·573	13·242	11·779	10·229	8·656	21
22	17·542	17·384	16·507	15·475	14·280	12·930	11·453	9·900	8·335	22
23	17·303	17·142	16·250	15·199	13·983	12·614	11·126	9·571	8·018	23
24	17·059	16·896	15·988	14·918	13·682	12·296	10·797	9·244	7·704	24
25	16·812	16·646	15·723	14·634	13·377	11·975	10·469	8·919	7·395	25
26	16·562	16·394	15·453	14·344	13·069	11·652	10·141	8·596	7·091	26
27	16·308	16·137	15·179	14·051	12·757	11·328	9·813	8·277	6·792	27
28	16·051	15·876	14·902	13·754	12·444	11·003	9·486	7·961	6·500	28
29	15·790	15·612	14·621	13·454	12·127	10·677	9·162	7·650	6·214	29
30	15·526	15·345	14·336	13·151	11·809	10·352	8·839	7·343	5·934	30
31	15·257	15·073	14·047	12·844	11·489	10·026	8·520	7·042	5·662	31
32	14·986	14·799	13·755	12·535	11·168	9·702	8·203	6·745	5·398	32
33	14·711	14·520	13·459	12·224	10·846	9·379	7·891	6·455	5·141	33
34	14·432	14·238	13·160	11·910	10·524	9·057	7·582	6·172	4·892	34
35	14·149	13·952	12·858	11·595	10·201	8·738	7·278	5·895	4·651	35
36	13·863	13·663	12·553	11·278	9·879	8·422	6·979	5·625	4·419	36
37	13·573	13·370	12·246	10·960	9·558	8·109	6·686	5·362	4·195	37
38	13·279	13·073	11·936	10·640	9·239	7·800	6·399	5·108	3·980	38
39	12·982	12·774	11·624	10·321	8·921	7·494	6·118	4·861	3·774	39
40	12·682	12·471	11·310	10·001	8·605	7·193	5·844	4·622	3·576	40
41	12·379	12·165	10·994	9·682	8·291	6·898	5·576	4·391	3·388	41
42	12·072	11·857	10·677	9·363	7·981	6·607	5·316	4·169	3·208	42
43	11·763	11·546	10·359	9·046	7·675	6·322	5·063	3·956	3·037	43
44	11·452	11·232	10·040	8·730	7·372	6·044	4·818	3·751	2·875	44
45	11·138	10·918	9·722	8·417	7·074	5·772	4·581	3·554	2·720	45
46	10·823	10·601	9·405	8·106	6·781	5·507	4·352	3·367	2·576	46
47	10·506	10·284	9·088	7·799	6·493	5·249	4·132	3·188	2·438	47
48	10·189	9·966	8·772	7·495	6·211	4·998	3·920	3·019	2·311	48
49	9·871	9·648	8·459	7·195	5·935	4·755	3·717	2·857	2·188	49
50	9·553	9·331	8·148	6·900	5·666	4·521	3·522	2·704	2·079	50
51	9·236	9·014	7·840	6·610	5·404	4·294	3·336	2·561	1·970	51
52	8·920	8·699	7·536	6·326	5·149	4·076	3·159	2·423	1·882	52
53	8·606	8·386	7·236	6·047	4·902	3·867	2·991	2·298	1·796	53
54	8·293	8·076	6·939	5·776	4·662	3·665	2·831	2·175	1·678	54
55	7·984	7·769	6·649	5·511	4·431	3·473	2·679	2·067	1·533	55
56	7·677	7·465	6·364	5·252	4·207	3·289	2·537	1·959	1·315	56
57	7·375	7·166	6·084	5·002	3·992	3·114	2·401	1·872		57
58	7·077	6·871	5·811	4·759	3·786	2·948	2·277	1·787		58
59	6·783	6·581	5·545	4·524	3·588	2·791	2·155	1·670		59

$d = 0{\cdot}0338164.$

O^M $3^1/_2\%$ TABELLE XII b. Barwerte der Verbindungsrenten auf zwei Leben nach der Sterbetafel O^M der 60 britischen Gesellschaften. $3^1/_2\%$ O^M

Alter des jüngeren Lebens x	a_{xy}									Alter des jüngeren Lebens x
	$y=x$	$y=x+1$	$y=x+2$	$y=x+3$	$y=x+4$	$y=x+5$	$y=x+6$	$y=x+7$	$y=x+8$	
60	8·103	7·945	7·781	7·612	7·437	7·257	7·072	6·884	6·691	60
61	7·795	7·639	7·477	7·310	7·137	6·960	6·779	6·594	6·405	61
62	7·490	7·336	7·177	7·012	6·843	6·669	6·491	6·309	6·124	62
63	7·190	7·039	6·882	6·720	6·554	6·383	6·209	6·031	5·850	63
64	6·895	6·746	6·592	6·433	6·270	6·103	5·933	5·759	5·583	64
65	6·605	6·458	6·307	6·152	5·993	5·830	5·663	5·494	5·323	65
66	6·320	6·177	6·029	5·877	5·722	5·563	5·401	5·236	5·070	66
67	6·041	5·901	5·757	5·609	5·458	5·303	5·146	4·986	4·825	67
68	5·769	5·633	5·492	5·348	5·201	5·051	4·898	4·744	4·588	68
69	5·504	5·371	5·235	5·095	4·952	4·807	4·659	4·510	4·359	69
70	5·246	5·117	4·985	4·849	4·711	4·570	4·428	4·284	4·139	70
71	4·996	4·871	4·743	4·611	4·478	4·342	4·205	4·066	3·927	71
72	4·753	4·632	4·508	4·382	4·253	4·122	3·990	3·857	3·723	72
73	4·519	4·402	4·282	4·160	4·037	3·911	3·784	3·656	3·528	73
74	4·292	4·180	4·065	3·948	3·829	3·708	3·587	3·465	3·342	74
75	4·075	3·966	3·856	3·743	3·629	3·514	3·398	3·282	3·165	75
76	3·865	3·761	3·656	3·548	3·439	3·329	3·218	3·107	2·996	76
77	3·664	3·565	3·464	3·361	3·257	3·152	3·047	2·941	2·836	77
78	3·472	3·377	3·281	3·183	3·084	2·984	2·884	2·784	2·684	78
79	3·289	3·198	3·106	3·013	2·919	2·824	2·729	2·635	2·541	79
80	3·114	3·028	2·941	2·852	2·763	2·673	2·584	2·494	2·406	80
81	2·948	2·866	2·783	2·699	2·615	2·531	2·446	2·362	2·279	81
82	2·790	2·713	2·634	2·555	2·476	2·396	2·316	2·238	2·159	82
83	2·641	2·568	2·494	2·419	2·344	2·269	2·195	2·120	2·048	83
84	2·500	2·431	2·361	2·291	2·221	2·151	2·080	2·012	1·942	84
85	2·367	2·302	2·236	2·171	2·105	2·039	1·974	1·909	1·847	85
86	2·242	2·181	2·120	2·058	1·996	1·936	1·874	1·815	1·755	86
87	2·125	2·068	2·011	1·953	1·896	1·838	1·783	1·725	1·673	87
88	2·015	1·962	1·908	1·855	1·801	1·750	1·695	1·647	1·594	88
89	1·913	1·863	1·814	1·763	1·715	1·665	1·619	1·570	1·531	89
90	1·817	1·772	1·725	1·680	1·633	1·590	1·544	1·508	1·474	90
91	1·730	1·687	1·645	1·601	1·561	1·518	1·484	1·453	1·405	91
92	1·647	1·603	1·568	1·531	1·490	1·459	1·431	1·385	1·325	92
93	1·574	1·536	1·502	1·464	1·435	1·409	1·367	1·311	1·203	93
94	1·501	1·470	1·435	1·409	1·385	1·346	1·294	1·193		94
95	1·441	1·409	1·385	1·363	1·327	1·280	1·185			95
96	1·379	1·357	1·337	1·305	1·262	1·175				96
97	1·337	1·319	1·289	1·249	1·167					97
98	1·302	1·275	1·238	1·161						98
89	1·252	1·220	1·150							99
100	1·197	1·138								100
101	1·107									101
102										102
103										103

$d = 0·0338164.$

Alter des jüngeren Lebens x	a_{xy}									Alter des jüngeren Lebens x
	$y=x+9$	$y=x+10$	$y=x+15$	$y=x+20$	$y=x+25$	$y=x+30$	$y=x+35$	$y=x+40$	$y=x+45$	
60	6·495	6·297	5·286	4·297	3·399	2·641	2·048	1·528		60
61	6·213	6·019	5·034	4·079	3·219	2·501	1·942	1·312		61
62	5·937	5·748	4·790	3·869	3·048	2·367	1·856			62
63	5·668	5·483	4·554	3·668	2·885	2·245	1·772			63
64	5·405	5·226	4·327	3·475	2·731	2·126	1·658			64
65	5·150	4·976	4·107	3·292	2·584	2·020	1·519			65
66	4·902	4·734	3·896	3·117	2·448	1·916	1·307			66
67	4·663	4·500	3·694	2·950	2·317	1·832				67
68	4·431	4·274	3·501	2·792	2·197	1·750				68
69	4·208	4·057	3·315	2·643	2·081	1·640				69
70	3·993	3·848	3·139	2·502	1·979	1·505				70
71	3·787	3·648	2·972	2·370	1·877	1·300				71
72	3·590	3·456	2·813	2·244	1·796					72
73	3·401	3·274	2·662	2·129	1·717					73
74	3·221	3·099	2·520	2·017	1·612					74
75	3·049	2·934	2·386	1·919	1·485					75
76	2·886	2·777	2·261	1·822	1·290					76
77	2·732	2·628	2·142	1·744						77
78	2·585	2·488	2·038	1·670						78
79	2·448	2·356	1·928	1·572						79
80	2·318	2·232	1·835	1·454						80
81	2·196	2·116	1·744	1·274						81
82	2·083	2·006	1·671							82
83	1·975	1·906	1·603							83
84	1·877	1·810	1·515							84
85	1·783	1·725	1·411							85
86	1·700	1·642	1·251							86
87	1·619	1·576								87
88	1·554	1·516								88
89	1·496	1·440								89
90	1·422	1·353								90
91	1·339	1·218								91
92	1·210									92
93										93
94										94
95										95
96										96
97										97
98										98
99										99
100										100
101										101
102										102
103										103

$d = 0·0338164.$

x	l_x	p_x	D_x	N_x	M_x	a_x	A_x	x
20	100 000	0·99 651	50 257	1 087 222	13 490·68	21·633	0·26 843	20
21	99 651	·99 638	48 388	1 036 965	13 321·22	21·431	·27 530	21
22	99 290	·99 624	46 582	988 577	13 151·86	21·222	·28 234	22
23	98 917	·99 609	44 838	941 595	12 982·76	21·009	·28 955	23
24	98 531	·99 593	43 153	897 157	12 813·73	20 790	·29 694	24
25	98 130	0·99 576	41 524	854 004	12 644·05	20·567	0·30 450	25
26	97 713	·99 557	39 949	812 480	12 473·56	20·338	·31 224	26
27	97 280	·99 536	38 427	772 531	12 302·52	20·104	·32 015	27
28	96 829	·99 514	36 955	734 104	12 130·40	19·865	·32 825	28
29	96 358	·99 491	35 532	697 149	11 956·72	19·620	·33 651	29
30	95 867	0·99 465	34 155	661 617	11 781·79	19·371	0·34 495	30
31	95 355	·99 437	32 824	627 462	11 605·54	19·116	·35 357	31
32	94 818	·99 407	31 536	594 638	11 426 94	18·856	·36 235	32
33	94 256	·99 375	30 288	563 102	11 246·35	18·591	·37 133	33
34	93 607	·99 340	29 082	532 814	11 063·48	18·321	·38 042	34
35	93 048	0·99 303	27 913	503 732	10 877·79	18·047	0·38 970	35
36	92 399	·99 262	26 780	475 819	10 689·69	17·768	·39 917	36
37	91 717	·99 218	25 684	449 039	10 498·71	17·484	·40 877	37
38	91 000	·99 171	24 621	423 355	10 304·72	17·195	·41 853	38
39	90 245	·99 120	23 591	398 734	10 107·36	16·902	·42 844	39
40	89 451	0·99 064	22 593	375 143	9 906·82	16·605	0·43 849	40
41	88 614	99 005	21 624	352 550	9 702·57	16·303	·44 869	41
42	87 732	·98 941	20 685	330 926	9 494·61	15·998	·45 901	42
43	86 802	·98 871	19 774	310 241	9 282·75	15·689	·46 944	43
44	85 822	·98 796	18 889	290 467	9 067·05	15·377	·48 002	44
45	84 789	0·98 715	18 031	271 578	8 847·37	15·062	0·49 068	45
46	83 700	·98 628	17 198	253 547	8 623·61	14·743	·50 143	46
47	82 552	98 534	16 388	236 349	8 395·71	14·422	·51 231	47
48	81 341	·98 433	15 602	219 961	8 163·43	14·098	·52 323	48
49	80 066	·98 323	14 838	204 359	7 927·15	13·773	·53 425	49
50	78 724	0·98 205	14 096	198 521	7 686·86	13·445	0·54 532	50
51	77 310	·98 078	13 375	175 425	7 442·24	13·117	·55 643	51
52	75 824	·97 940	12 674	162 050	7 193·86	12·786	·56 761	52
53	74 262	·97 792	11 993	149 376	6 941·60	12·455	·57 881	53
54	72 623	·97 632	11 331	137 383	6 685·87	12·124	·59 005	54
55	70 903	0·97 460	10 689	126 052	6 426·56	11·792	0·60 123	55
56	69 102	·97 274	10 065	115 363	6 164·23	11·461	·61 244	56
57	67 218	·97 074	9 459·6	105 298 4	5 899·09	11·132	·62 361	57
58	65 251	·96 858	8 872·8	95 838·8	5 631·62	10·801	·63 471	58
59	63 201	·96 626	8 803·3	86 966·0	5 362·29	10·474	·64 580	59
60	61 068	0·96 375	7 751·4	78 662·7	5 091·55	10·148	0·65 686	60
61	58 855	·96 105	7 218·0	70 911·3	4 820·15	9·8242	·66 780	61
62	56 563	·95 815	6 702·1	63 693·3	4 548·57	9·5034	·67 868	62
63	54 196	·95 502	6 204·9	56 991·2	4 277·57	9·1848	·68 939	63
64	51 758	·95 166	5 725·5	50 786·3	4 007·88	8·8702	·70 001	64
65	49 256	0·94 803	5 264 5	45 060·8	3 740·47	8·5594	0·71 051	65
66	46 696	·94 414	4 821·8	39 796·3	3 476·12	8·2583	·72 092	66
67	44 087	·93 995	4 398·5	34 974·5	3 215·82	7·9515	·73 112	67
68	41 440	·93 544	3 994·6	30 576·0	2 960·66	7·6543	·74 117	68
69	38 765	·93 060	3 610·4	26 581·4	2 711·52	7·3623	·75 103	69

$d = 0{\cdot}0338164.$

x	l_x	p_x	D_x	N_x	M_x	a_x	A_x	x
70	36 075	0·92 540	3 246·2	22 971·0	2 469·46	7·0 762	0·76 072	70
71	33 384	·91 982	2 902·5	19 724·8	2 235·50	6·7 959	·77 020	71
72	30 707	·91 383	2 579 5	16 822·3	2 010·62	6·5 215	·77 946	72
73	28 061	·90 740	2 277·5	14 242·8	1 795·87	6·2 538	·78 853	73
74	25 462	·90 051	1 996·7	11 965·3	1 595·06	5·9 925	·79 735	74
75	22 929	0·89 313	1 737·2	9 968·6	1 400·14	5·7 382	0·80 598	75
76	20 479	·88 522	1 499·1	8 231·4	1 220·79	5·4 907	·81 435	76
77	18 128	·87 676	1 282·2	6 732·3	1 054·51	5·2 508	·82 242	77
78	15 894	·86 772	1 086·1	5 450·1	901·85	5·0 178	·83 036	78
79	13 792	·85 806	910·63	4 364 02	768·06	4·7 923	·83 795	79
80	11 834	0 84 774	754·93	3 453·39	638·15	4·5 745	0·84 531	80
81	10 032	·83 674	618·33	2 698·46	527·079	4·3 642	·85 242	81
82	8 394	·82 502	499·87	2 080·13	429·534	4·1 613	·85 929	82
83	6 926	·81 254	398·51	1 580·26	345·068	3·9 655	·86 590	83
84	5 627	·79 928	312·82	1 181·75	272·854	3·7 779	·87 224	84
85	4 498	0 78 520	241·60	868·93	212·213	3·5 966	0·87 837	85
86	3 532	·77 027	183·30	627·33	162·081	3·4 225	·88 424	86
87	2 720	·75 447	136·38	444·03	121·367	3·2 557	·88 992	87
88	2 052	·73 777	99·409	307·646	89·006	3·0 948	·89 535	88
89	1 514	·72 014	70·866	208·237	63·824	2·9 385	·90 063	89
90	1 090	0·70 158	49·294	137·371	44·649	2·7 867	0·90 577	90
91	765	·68 207	33·427	88·077	30·448	2·6 349	·91 088	91
92	522	·66 161	22·037	54·650	20·1 891	2 4 799	·91 615	92
93	345	·64 020	14·072	32·613	12·9 694	2·3 175	·92 165	93
94	221	·61 786	8·7 096	18·5 412	8·0 826	2·1 288	·92 801	94
95	137	0·59 460	5·2 165	9·8 816	4·8 841	1·8 847	0·93 628	95
96	81	·57 047	2·9 800	4·6 151	2·8 239	1·5 487	·94 762	96
97	46	·54 550	1·6 351	1·6 351	1·5 798	1·0 000	·96 618	97

$d = 0{\cdot}0338164.$

TABELLE XIV.

Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für die Invaliditäts- und Altersrentenversicherungen.

Aktivitätsordnung und Invaliditätstafel nach H. Zimmermann.

4%

x	$^{a}l_x$	$^{aa}q_x$	i_x	$^{a}D_x$	$^{a}N_x$	$^{a}N_x^{(12)}$	$^{ai}D_x$	$^{ai}N_x$	$^{ai}S_x$	$^{i}a_x$	x
20	100 000	0·00 907	0·00 024	45 639	835 782	814 569	77·6	48 218·3	1671 772·2	8·666	20
21	99 072	·00 866	·00 026	43 476	790 143	769 935	93·9	48 140·7	1623 553·9	8·878	21
22	98 188	·00 828	·00 033	41 431	746 667	727 410	116·3	48 046·8	1575 413·2	9·085	22
23	97 343	·00 792	·00 040	39 495	705 236	686 879	137·4	47 930·5	1527 366·4	9·288	23
24	96 533	·00 762	·00 047	37 660	665 741	648 237	157·2	47 793·4	1479 435·9	9·477	24
25	95 752	0·00 739	0·00 054	35 918	628 081	611 386	175·5	47 635·9	1431 642·8	9·654	25
26	94 993	·00 717	·00 062	34 263	592 163	576 238	195·4	47 460·4	1384 006·9	9·816	26
27	94 253	·00 700	·00 071	32 689	557 900	542 706	216·5	47 265·0	1336 546·5	9·961	27
28	93 526	·00 690	·00 080	31 189	525 211	510 714	235·4	47 048·5	1289 281·5	10·083	28
29	92 806	·00 685	·00 085	29 758	494 022	480 190	240·7	46 813·1	1242 233·0	10·179	29
30	92 091	0·00 683	0·00 096	28 393	464 264	451 067	260·9	46 572·4	1195 419·9	10·248	30
31	91 374	·00 686	·00 113	27 089	435 871	423 280	294·2	46 311·5	1148 847·5	10·293	31
32	90 644	·00 703	·00 131	25 839	408 782	396 772	326·5	46 017·3	1102 536·0	10·326	32
33	89 888	·00 717	·00 156	24 638	382 943	371 491	372·1	45 690·8	1056 518·7	10·362	33
34	89 103	·00 741	·00 187	23 483	358 305	347 390	427·0	45 318·7	1010 827·9	10·402	34
35	88 276	0·00 766	0·00 220	22 371	334 822	324 424	480·7	44 891·7	965 509·2	10·446	35
36	87 406	·00 801	·00 248	21 298	312 451	302 552	518·6	44 411·0	920 617·5	10·494	36
37	86 489	·00 830	·00 282	20 264	291 153	281 734	564·2	43 892·4	876 206·5	10·548	37
38	85 527	·00 867	·00 310	19 268	270 889	261 933	593·4	43 328·2	832 314·1	10·607	38
39	84 520	·00 898	·00 341	18 309	251 621	243 111	624·3	42 734·8	788 985·9	10·674	39
40	83 473	0·00 936	0·00 382	17 386	233 312	225 231	668·4	42 110·5	746 251·1	10·740	40
41	82 373	·00 966	·00 437	16 498	215 926	208 258	729·2	41 442·1	704 140·6	10·802	41
42	81 217	·01 010	·00 488	15 640	199 428	192 158	774·6	40 712·9	662 698·5	10·844	42
43	80 000	·01 055	·00 554	14 813	183 788	176 903	834·0	39 938·3	621 985·6	10·871	43
44	78 713	·01 104	·00 626	14 015	168 975	162 461	891·2	39 104·3	582 047·3	10·873	44
45	77 351	0·01 157	0·00 698	13 242	154 960	148 805	936·9	38 213·1	542 943·0	10·860	45
46	75 916	·01 227	·00 771	12 497	141 718	135 909	973·3	37 276·2	504 729·9	10·829	46
47	74 399	·01 288	00 887	11 776	129 221	123 747	1 050·5	36 302·9	467 453·7	10·789	47
48	72 781	·01 354	·01 026	11 077	117 445	112 296	1 137·0	35 252·4	431 150·8	10·739	48
49	71 049	·01 441	01 178	10 397	106 368	101 535	1 217·6	34 115·4	395 898·4	10·680	49
50	69 188	0·01 524	0 01 375	9 735·6	95 971·4	91 446·3	1 321·1	32 897·8	361 783·0	10·611	50
51	67 182	·01 600	·01 609	9 089·8	86 235·8	82 010·9	1 430·9	31 576·7	328 885·2	10·532	51
52	65 026	·01 690	·01 838	8 459·7	77 146·0	73 214·0	1 505·7	30 145·8	297 308·5	10·438	52
53	62 732	·01 784	·02 075	7 847·3	68 686·3	65 038·9	1 575·5	28 640·1	267 162·7	10·327	53
54	60 311	·01 842	·02 373	7 254·3	60 839·0	57 467·2	1 623·3	27 082·6	238 522·6	10·195	54
55	57 769	0·01 916	0·02 687	6 681·3	53 584·7	50 479·2	1 666·2	25 459·3	211 440·0	10·051	55
56	55 110	·02 005	·03 059	6 128·6	46 903·4	44 054·8	1 709·8	23 793·1	185 980·7	9·892	56
57	52 319	·02 082	·03 507	5 594·5	40 774·8	38 174·5	1 755·2	22 083·3	162 187·6	9·721	57
58	49 395	·02 191	·04 069	5 078·7	35 180·3	32 819·7	1 810·2	20 328·1	140 104·3	9·537	58
59	46 303	·02 339	·04 695	4 577·6	30 101·6	27 973·9	1 839·9	18 517·9	119 776 2	9·341	59

TABELLE XIV.

Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für die Invaliditäts- und Altersrentenversicherungen.

Aktivitätsordnung und Invaliditätstafel nach H. Zimmermann.

4%

x	$^{a}l_x$	$^{aa}q_x$	i_x	$^{a}D_x$	$^{a}N_x$	$^{a}N_x^{(12)}$	$^{ai}D_x$	$^{ai}N_x$	$^{ai}S_x$	$^{i}a_x$	x
60	43 046	0·02 520	0·05 427	4092·0	25524·0	23622·1	1854·6	16678·0	101258·3	9·132	60
61	39 625	·02 683	·06 185	3621·9	21432 0	19748·5	1822·3	14823·4	84580·3	8·914	61
62	36 111	·02 922	·07 039	3173·8	17810·1	16334·9	1768·0	13001·1	69756·9	8·690	62
63	32 514	·03 137	·07 914	2747·7	14636·3	13359·2	1672·3	11233·1	56755·8	8·463	63
64	28 921	·03 357	·08 814	2350·1	11888·6	10796·3	1546·3	9560·8	45522·7	8·234	64
65	25 401	0·03 515	0 09 752	1984·7	9538·5	8616·0	1401·2	8014·5	35961·9	8 005	65
66	22 031	·03 708	·10 851	1655·1	7553·8	6784·5	1259·1	6613·3	27947·4	7·774	66
67	18 824	·03 879	·12 009	1359·8	5898·7	5266·7	1106·84	5354·2	21334·1	7·537	67
68	15 833	·04 101	·13 166	1099·8	4538·9	4027 7	947·19	4247·36	15979·88	7·299	68
69	13 099	·04 227	·14 479	874·86	3439·14	3032·51	797·89	3300·17	11732·52	7·056	69
70	10 649	0·04 438	0·15 781	683·87	2564·28	2246·42	652·86	2502·28	8432·35	6·804	70
71	8 496	·04 733	·17 085	524·62	1880·41	1636·56	519·37	1849·42	5930 07	6·547	71
72	6 642	·05 143	·18 374	394·37	1355·79	1172·49	401 00	1330·05	4080·65	6·284	72
73	5 080	·05 655	·19 246	290·02	961·42	826·62	294·18	929 05	2750·60	6·016	73
74	3 815	·06 268	·19 975	209·42	671·40	574·06	209·48	634·87	1821·55	5·746	74
75	2 814	0·06 830	0·20 617	148·53	461·98	392·94	145·371	425·39	1186·68	5·480	75
76	2 042	·07 354	·21 197	103·64	313 45	265·28	98·695	280·019	761·286	5·216	76
77	1 459	·07 844	·21 730	71·201	209·811	176·717	65·696	181·324	481·267	4·960	77
78	1 027	·08 308	22 226	48·191	138·610	116·211	42·965	115·628	299·943	4·713	78
79	714	·08 747	·22 692	32·216	90·419	75·445	27·682	72 663	184·315	4·482	79
80	489	0·09 166	0·23 134	21·215	58·203	48·342	17·528	44·981	111·652	4·255	80
81	331	·09 575	·23 537	13·808	36·988	30·570	10·9283	27·453	66·671	4·043	81
82	222	·09 968	·23 922	8·9047	23·1804	19·0415	6·7180	16·5247	39·2183	3·830	82
83	146	·10 228	·24 409	5·6310	14·2757	11·6584	4 0459	9·8067	22 6936	3·617	83
84	96	·10 561	·25 046	3·5602	8·6447	6·9899	2·4382	5·7608	12·8869	3·402	84
85	62	0·11 004	0·25 914	2·2109	0·0845	4·0569	1·45000	3·3226	7·1261	3·190	85
86	39	·11 623	·27 164	1·3372	2·8736	2·2521	0·84585	1·87260	3·80349	2·984	86
87	24	·12 542	·29 125	0·79125	1·53636	1·16859	0·48920	1·02675	1 93089	2·780	87
88	14	·14 044	·32 641	0·44381	0·74511	0·53883	0·27883	0·53755	0·90414	2·570	88
89	7	·16 849	·40 773	0·21337	0·30130	0·20213	0·15085	0·25872	0·36659	2·370	89
90	3	0·20 000	0·80 000	0·087927	0·087927	0·047059	0·107 87	0·10787	0·10787	2·177	90

TABELLE XV.

Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für Versicherungen der Witwenrenten.

Preußische Volkssterbetafel für Frauen 1891 bis 1900. Familienstands-verhältnisse aus der Privatbeamtenstatistik.

Invalidensterbetafel nach H. Zimmermann.

4%

x y	l_y	D_y	$\mathbb{N}_y$	${}^{ai}D_{x(y)}$	${}^{ai}\mathbb{N}_{x(y)}$	${}^{ai}\mathbb{S}_{x(y)}$	$a_y^{(12)}$	x y
20	68 745	31 374·3	631 245·5	46·9	95 395·6	2 499 557·1	19·655	20
21	68 437	30 032 5	599 871·2	65·6	95 348·7	2 404 161·5	19·509	21
22	68 120	28 743·6	569 838·7	195·6	95 283·1	2 308 812·8	19·360	22
23	67 786	28 502·6	541 095·1	445·6	95 087·5	2 213 529·7	19·209	23
24	67 438	26 309·0	513 592·5	705·9	94 641·9	2 118 442·2	19·057	24
25	67 067	25 158·0	487 283·5	1 060·9	93 936·0	2 023 800·3	18·904	25
26	66 687	24 053·3	462 125·5	1 383·0	92 875·1	1 929 864·3	18·748	26
27	66 296	22 992·6	438 072·2	1 626·5	91 492·1	1 836 989·2	18·588	27
28	65 895	21 974·5	415 079·6	1 828·9	89 865·6	1 745 497·1	18·424	28
29	65 481	20 996·6	393 105·1	1 961·1	88 036·7	1 655 631·5	18·257	29
30	65 055	20 057·7	372 108 5	2 090·0	86 075·6	1 567 594·8	18·087	30
31	64 615	19 155 8	352 050·8	2 216·5	83 985·6	1 481 519·2	17·913	31
32	64 162	18 289·9	332 895·0	2 332·9	81 769·1	1 397 533·6	17·736	32
33	63 697	17 459·0	314 605·1	2 382·6	79 436·2	1 315 764·5	17·555	33
34	63 220	16 661·8	297 146·1	2 471·0	77 053·3	1 236 328·3	17·369	34
35	62 732	15 897·3	280 484·3	2 546·6	74 582·3	1 159 275·0	17·179	35
36	62 236	15 165·0	264 587·0	2 591·7	72 035·7	1 084 692·7	16·982	36
37	61 732	14 463·6	249 422·0	2 659·5	69 444·0	1 012 657 0	16·780	37
38	61 220	13 792·0	234 958·4	2 703·0	66 784·5	943 213·0	16·571	38
39	60 699	13 148·7	221 166·4	2 663·2	64 081·5	876 428·5	16·355	39
40	60 172	12 533·2	208 017·7	2 670·8	61 418·3	812 347·0	16·132	40
41	59 635	11 943·6	195 484·5	2 637·5	58 747·5	750 928·7	15·902	41
42	59 095	11 380·2	183 540·9	2 616·3	56 110·0	692 181·2	15·663	42
43	58 552	10 842·0	172 160·7	2 648·3	53 493·7	636 071·2	15·414	43
44	58 008	10 328·1	161 318·7	2 632·6	50 845·4	582 577·5	15·154	44
45	57 462	9 837·40	150 990·63	2 612·9	48 212·8	531 732·1	14·884	45
46	56 907	9 367·68	141 153·23	2 634·0	45 599·9	483 519·3	14·603	46
47	56 340	8 917·64	131 785·55	2 621·6	42 965·9	437 919·4	14·313	47
48	55 756	8 485·77	122 867·91	2 597·9	40 344·3	394 953·5	14·014	48
49	55 148	8 070·42	114 382·14	2 591·5	37 746·4	354 609·2	13·708	49
50	54 508	7 669·96	106 311·72	2 569·4	35 154·9	316 862·8	13·396	50
51	53 837	7 284·18	98 641·76	2 514·1	32 585·5	281 707·9	13·077	51
52	53 113	6 909·83	91 357·58	2 453·5	30 071·4	249 122·4	12·756	52
53	52 361	6 549·99	84 447·75	2 377·3	27 617·9	219 051·0	12·428	53
54	51 561	6 201·85	77 897·76	2 272·9	25 240·6	191 433·1	12·095	54
55	50 707	5 864·54	71 695·91	2 170·1	22 967·7	166 192·5	11·760	55
56	49 798	5 537·90	65 831·37	2 077·1	20 797·6	143 224·8	11·422	56
57	48 830	5 221·39	60 293·47	1 975·6	18 720·5	122 427·2	11·082	57
58	47 810	4 915·70	55 072·08	1 896·7	16 744·9	103 706·7	10·738	58
59	46 737	4 620·55	50 156·38	1 820·0	14 848·2	86 961·8	10·390	59

TABELLE XV.

Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für Versicherungen der Witwenrenten.

Preußische Volkssterbetafel für Frauen 1891 bis 1900. Familienstands-verhältnisse aus Privatbeamtenstatistik.

Invalidensterbetafel nach H. Zimmermann.

4%

x y	l_y	D_y	$\mathbb{N}_y$	${}^{ai}D_{x(y)}$	${}^{ai}\mathbb{N}_{x(y)}$	${}^{ai}\mathbb{S}_{x(y)}$	$a_y^{(12)}$	x y
60	45 610	4 335·70	45 535·83	1 743·0	13 028·2	72 113·6	10·038	60
61	44 421	4 060·27	41 200·13	1 630·5	11 285·2	59 085·4	9·6824	61
62	43 152	3 792·57	37 139·86	1 525·9	9 654·7	47 800·2	9·3280	62
63	41 794	3 531·94	33 347·29	1 390·4	8 128·8	38 145·5	8·9768	63
64	40 336	3 277·62	29 815·35	1 241·6	6 738·4	30 016·7	8·6319	64
65	38 774	3 029·52	26 537·73	1 078·5	5 496·8	23 278·3	8·2950	65
66	37 116	2 788·44	23 508·21	928·7	4 418·3	17 781·5	7·9658	66
67	35 373	2 555·28	20 719·77	782·1	3 489·6	13 363 2	7·6439	67
68	33 556	2 330·79	18 164·49	646·9	2 707·5	9 873·6	7·3285	68
69	31 678	2 115·72	15 833·70	521·0	2 060·6	7 166·1	7·0191	69
70	29 752	1 910·66	13 717·98	412 8	1 539·6	5 105·5	6·7150	70
71	27 789	1 715·95	11 807·32	320·7	1 126·8	3 565·9	6·4161	71
72	25 801	1 531·92	10 091·37	244·2	806·1	2 439·1	6·1226	72
73	23 797	1 358·59	8 559·45	179·1	561·9	1 633·0	5·8355	73
74	21 790	1 196·16	7 200·86	128·2	382·8	1 071·1	5·5552	74
75	19 792	1 044·69	6 004·70	89·2	254·6	688·3	5·2830	75
76	17 817	904·276	4 960·009	60·1	165·4	433·7	5·0203	76
77	15 880	774·967	4 055·733	39·7	105·3	268·3	4·7687	77
78	13 998	656·849	3 280·766	25·43	65·6	163·0	4·5299	78
79	12 203	550 596	2 623·917	16·08	40·17	97·40	4·3008	79
80	10 500	455·535	2 073·321	9·88	24·09	57·23	4·0866	80
81	8 917	371·979	1 617·786	5·91	14·21	33·14	3·8844	81
82	7 474	299·791	1 245·807	3·58	8·30	18·93	3·6908	82
83	6 178	238·276	946·016	2·04	4·72	10·63	3·5055	83
84	5 029	186·501	707·740	1·20	2·68	5·91	3·3300	84
85	4 028	143·633	521·239	0·63	1·48	3·23	3·1642	85
86	3 172	108·759	377 606	0·36	0·85	1·75	3·0072	86
87	2 454	80·9048	268·8474	0·25	0·49	0·90	2·8582	87
88	1 859	58·9312	187·9426	0·13	0·24	0·41	2·7244	88
89	1 383	42·1556	129·0114	0·05	0·11	0·17	2·5956	89
90	1 007	29·5141	86·8558	0·06	0·06	0 06	2·4781	90

TABELLE XVI.

Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für Versicherungen der Waisenrenten und einmaligen Abfertigungen.

Preußische Sterbetafel 1891 bis 1900. Familienstandsverhältnisse aus der Privatbeamtenstatistik.

Invaliditäts- und Sterbetafel nach H. Zimmermann. **4%**

x	$v^{\frac{1}{2}}\,{}^{aa}C_x\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(z)}$	$v^{\frac{1}{2}}\,{}^{J}D_x\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(z)}$	${}^{ai}D_{x(z)}$ *)	${}^{ai}N_{x(z)}$ *)	${}^{a}h_x$	$v^{\frac{1}{2}}\,{}^{aa}C_x\,{}^{a}h_x$	${}^{a}_{h}M_x$	x	z	$a^{(12)}_z$
20	4·9	24·7	25·2	57680·5	0·00047	0·19	4223·06	20	0	9·39
21	9·0	33·6	36·9	57655·3	·00328	1·21	4222·87	21	1	11·09
22	29·8	46·7	64·2	57618·4	·00285	0·96	4221·66	22	2	11·13
23	100·1	61·5	137·5	57554·2	·03882	11·91	4220·70	23	3	10·81
24	235·4	77·6	265·1	57416·7	·08549	24·07	4208·79	24	4	10 39
25	392·2	94·6	414·2	57151·6	0·13996	36·40	4184·72	25	5	9·90
26	580·1	113·6	589·8	56737·4	·24066	57·97	4148·32	26	6	9 36
27	794·3	134·2	789·4	56147·6	·30423	68·29	4090·35	27	7	8·77
28	985·9	153·8	968·4	55358·2	·38894	82·03	4022·06	28	8	8·15
29	1185·4	164·3	1147 9	54389·8	·44695	89·38	3940·03	29	9	7·49
30	1391·2	184·4	1338·8	53241·9	0·50549	96·13	3850·65	30	10	6·80
31	1585·6	213·4	1529·1	51903·1	·56555	103·08	3754·52	31	11	6·07
32	1770·1	240·6	1708·9	50374·0	·61762	109·97	3651·44	32	12	5·31
33	1909·7	276·0	1858·8	48665·1	·65447	113·46	3541·47	33	13	4·51
34	2066·6	315·7	2024·8	46806·3	·67140	114·52	3428·01	34	14	3·68
35	2196·5	350·7	2163·7	44781·5	0·71857	120·71	3313·49	35	15	2·82
36	2326·3	369·6	2291·8	42617·8	·72995	122·09	3192·78	36	16	1·92
37	2431·2	388·3	2398·1	40326·0	·74925	123·60	3070·69	37	17	0·98
38	2488·6	389·9	2446·9	37927·9	·79154	129·74	2947·09	38		
39	2460·1	388·1	2421·6	35481·6	·79849	128·74	2817·35	39		
40	2445·9	390·1	2410·6	33059·4	0·81082	129·34	2688 61	40		
41	2372·5	397·5	2356·5	30648·8	·82269	128·61	2559·27	41		
42	2296·2	393·3	2289·2	28292·3	·80037	124·08	2430·66	42		
43	2216·8	393·6	2218·3	26003·1	·82889	127·02	2306·58	43		
44	2140·2	390·0	2151·0	23784·8	·84626	128·39	2179·56	44		
45	2035·4	379·0	2052·0	21633·8	0 83616	125·63	2051·17	45		
46	1922·9	363·0	1943·4	19581·8	·85641	128·84	1925·54	46		
47	1789·2	360·4	1826·8	17638·4	·86754	128·99	1796·70	47		
48	1657·7	357·7	1712·7	15811·6	·86528	127·20	1667·71	48		
49	1544·5	350·3	1610·5	14098·9	·85839	126·13	1540·51	49		
50	1416·4	346·7	1499·9	12488·4	0·86485	125·89	1414·38	50		
51	1275·0	342·1	1375·0	10988·5	·84913	121·84	1288·49	51		
52	1142·0	328·3	1250·3	9613·5	·84005	118·29	1166·65	52		
53	1009·2	310·9	1122·3	8363·2	·83072	114·32	1048·36	53		
54	859·1	298·2	984·0	7240·9	·82104	107·70	934·04	54		
55	740·9	282·9	870·5	6256·9	0·81093	101·80	826·34	55		
56	649·1	268·9	780·6	5386·4	·80039	96·482	724·541	56		
57	556 6	256·1	690·7	4605·8	·78927	90·172	628·059	57		
58	475·6	245·6	613·1	3915·1	·77769	84·881	537·887	58		
59	403·6	233·4	541·7	3302·0	·76555	80·411	453·006	59		

*) Nach Kürzung um 15 Prozent (im Sinne des Pensionsgesetzes).

TABELLE XVI.

Grundzahlen zur Berechnung der Prämien für Versicherungen der Waisenrenten und einmaligen Abfertigungen.

Preußische Sterbetafel 1891 bis 1900, Familienstandsverhältnisse aus der Privatbeamtenstatistik.

4% Invaliditäts- und Sterbetafel nach H. Zimmermann.

x	$v^{\frac{1}{2}}\,{}^{aa}C_x\,{}^{a}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}(z)}$	$v^{\frac{1}{2}}\,{}^{J}D_x\,{}^{i}a^{(12)}_{x+\frac{1}{2}}$	${}^{ai}D_{x(z)}$ *)	${}^{ai}N_{x(z)}$ *)	${}^{a}h_x$	$v^{\frac{1}{2}}\,{}^{aa}C_x\,{}^{a}h_x$	${}^{a}_{h}M_x$	x
60	350·0	221·0	485·6	2760·3	0·75275	76·137	372·595	60
61	305·8	203·6	433·1	2274·7	·73929	70·447	296·458	61
62	268·9	183·9	385·0	1841·6	·72501	65·927	226·011	62
63	228·6	160·6	331·1	1456 6	·71003	60·021	160·084	63
64	198·8	135·7	276·9	1125·5	·69420	53·710	100·063	64
65	148·71	111·21	221·21	848 6	0·67751	46·353	46 353	65
66	112·42	89·85	171·97	627·39				66
67	80·79	71·01	129·01	455·42				67
68	55·55	55·08	94·07	326·41				68
69	34·45	43·09	65·95	232·34				69
70	23·14	33·70	48·32	166·39				70
71	17·98	25·76	37·18	118·07				71
72	13·91	18·85	27·85	80·89				72
73	10·62	12 81	19·92	53·04				73
74	8·00	8·21	13·78	23·12				74
75	5·53	4 93	8·89	19·34				75
76	3 468	2·703	5·245	10·45				76
77	2·035	1·372	2 896	5·205				77
78	1·095	0·607	1·447	2·309				78
79	0·5167	0·2231	0·6288	0·862				79
80	0·1811	0 0558	0·2014	0·2332				80
81	0·0318	0·0056	0 0318	0 0318				81

*) Nach Kürzung um 15 Prozent (im Sinne des Pensionsgesetzes)



END OF
TITLE